

Inhalt

1 Lineare Algebra

1.1 Lineare Funktionen, Austausch	11
1.11 Summenkontrollen	14
1.12 Transponierte Beschriftung	14
1.13 Modifizierter Austausch	16
1.2 Inversion	16
1.21 Lösung linearer Gleichungen durch Inversion	17
1.22 Ausnahmefälle, theoretische Folgerungen	18
1.23 Folgerungen für die Rechenpraxis	21
1.3 Praktische Auflösung linearer Gleichungen	21
1.31 Gaußsche Elimination	21
1.32 Nachträgliche Berechnung der inversen Matrix	24
1.33 Rundungsfehler	24
1.34 Überwiegende Diagonale, konzentrierter Algorithmus	25

2 Lineare Programmierung

2.1 Ein Einführungsbeispiel	28
2.11 Graphische Lösung	29
2.2 Lösung eines Programms mit dem Austauschverfahren	30
2.3 Geometrische Interpretation des Simplex-Algorithmus	34
2.4 Verallgemeinerungen	36
2.41 Der allgemeinste Fall	38
2.5 Duale Lösungsmethode	40
2.6 Anwendung auf die Spieltheorie	42
2.61 Spiele mit Sattelpunkt	46
2.7 Ausgleichung nach Tschebyscheff	47

3 Ausgleichung nach kleinsten Quadraten und definite Probleme

3.1 Die Methode der kleinsten Quadrate	52
3.11 Mittleres Residuum	55
3.12 Mehrere Unbekannte	57
3.2 Definite Probleme	60
3.21 Geometrische Interpretation	62
3.3 Lösung symmetrisch-definiten Gleichungen	63
3.31 Anwendung auf die Rechentechnik	66
3.4 Orthogonalität	67

8 Inhalt

4 Nichtlineare Algebra

4.1 Linearisierung	69
4.11 Übungen im Linearisieren	72
4.12 Funktionen mehrerer Variablen	73
4.2 Die Korrekturmethode von Newton	74
4.3 Rekursionsformeln, Konvergenz	77
4.31 Rekursionen im Gebiete mehrerer Variablen	80
4.4 Newtonsche Methode für mehrere Unbekannte	81
4.41 Definite nichtlineare Probleme	83
4.5 Polynome	84
4.51 Das Rechenschema von Horner	85
4.52 Eigenschaften der Nullstellen	87
4.53 Division durch ein quadratisches Polynom	88
4.54 Lösung algebraischer Gleichungen	89
4.6 Direkte Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen	92
4.61 Die Methode von Bernoulli	93
4.62 Konvergenzverbesserungen	97
4.63 Komplexe Pole	98
4.64 Der Rhomben-Algorithmus	98
4.65 Dominante Wurzel, Stabilität	100

5 Eigenwertprobleme

5.1 Ein Einführungsbeispiel	101
5.2 Das charakteristische Polynom	102
5.21 Algorithmus für das charakteristische Polynom	105
5.22 Ausnahmefälle	107
5.23 Symmetrische Eigenwertprobleme	108
5.24 Der Kreisesatz von Gerschgorin	109
5.3 Allgemeines Eigenwertproblem, iterative Methoden	109
5.31 Der symmetrische Fall	114
5.32 Beispiel zur Iterationsmethode	115
5.4 Ausblicke	118
5.41 Lineare Schwinger	119

6 Differentialgleichungen

6.1 Numerische Differentiation	123
6.11 Weitere Formeln zur Differentiation	127
6.2 Numerische Integration	128
6.21 Trapezregel	128
6.22 Fortgesetzte Halbierung	131
6.23 Ergänzungen zur Integrationstheorie	136
6.24 Periodische Funktionen	137

6.3	Differentialgleichung 1. Ordnung	138
6.31	Nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung	141
6.32	Methode von Heun	142
6.33	Methoden von Runge-Kutta	143
6.34	Methode von Adams	146
6.4	Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung	148
6.41	Differentialgleichungen höherer Ordnung	149
6.42	Singularitäten	150
6.43	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	153
6.44	Einiges über numerische Stabilität	154
6.45	Die Methode des stärksten Abstiegs	159
6.5	Randwertaufgaben	164
6.51	Methode der Partikulärlösungen	165
6.52	Methode der Diskretisation	169
6.6	Partielle Differentialgleichungen	175
6.61	Parabolische Gleichungen	176
6.62	Elliptische Randwertprobleme	180
6.63	Krummer Rand	185
7	Approximationen	
7.1	Das Stützpolynom	187
7.11	Rechentchnik für die Lagrange-Formel	190
7.12	Anwendung auf die numerische Differentiation und Interpolation	193
7.2	Systeme von Polynomen	199
7.21	Tschebyscheff-Polynome	199
7.22	Approximation durch Tschebyscheff-Entwicklung	202
7.23	Entwicklung des Stützpolynoms	205
7.3	Stützprobleme im Komplexen	207
7.31	Realitätsverhältnisse	210
7.32	Harmonische Analyse (Fourier-Analyse)	212
7.33	Anwendung auf die Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen	214
8	Spline-Interpolation (von H.-R. Schwarz)	
8.1	Charakterisierung der Spline-Funktion	216
8.11	Die Eigenschaften der Spline-Funktion	217
8.12	Verallgemeinerungen	218
8.2	Kubische Spline-Interpolation	219
8.21	Zweite Ableitungen als Unbekannte	220
8.22	Zur Lösung der tridiagonalen Gleichungssysteme	222
8.23	Beispiel	224

8.3	Ergänzungen	225
8.31	Allgemeine kubische Spline-Interpolation	225
8.32	Glatte zweidimensionale Kurvendarstellung	227
9	Die Methode der finiten Elemente (von H.-R. Schwarz)	
9.1	Grundlagen	229
9.2	Die Grundidee der Methode der finiten Elemente	231
9.3	Die Elementmatrizen	232
9.4	Aufstellung des linearen Gleichungssystems	238
9.5	Beispiel	238
Anhang I	Rechenbeispiele	
1	Inversion einer 4reihigen Matrix	241
2	Vier lineare Gleichungen. Gauß-Algorithmus	242
3	Vier Gleichungen, konzentrierter Gauß-Algorithmus	243
4	Methode von Bernoulli, kubische Gleichung	243
5	Methode von Bernoulli, kubische Gleichung (komplexe Wurzeln)	244
6	Rhomben-Algorithmus	244
7	Berechnung eines charakteristischen Polynoms und eines zugehörigen Eigenwertes samt Eigenvektor	245
8	Numerische Integration	246
9	Methode von Runge-Kutta	246
Anhang II	Tabellen	
1	Numerische Differentiation	248
2	Numerische Integration	249
3	Stützkoeffizienten	249
4	Harmonische Analyse, 12 Stützwerte	250
5	Ergänzung einer Analyse mit 12 Stützwerten zu einer Analyse mit 24 Stützwerten	251
6	Harmonische Synthese, 12 Stützwerte	252
7	Harmonische Synthese, 24 Stützwerte	253
8	Nomogramm für die kubische Interpolation und die Bildung der quadratischen Verbesserung	254
9	Tschebyscheff-Polynome	255
Anhang III	Aufgaben	256
Anhang IV	Anleitungen zur Lösung der Aufgaben	266
Literatur		286
Sachverzeichnis		289