

Obsah

1	Analýza složitosti paralelních algoritmů	1
1.1	Základní pojmy	1
1.2	Měřítko výkonnosti sekvenčních algoritmů	3
1.3	Měřítko výkonnosti paralelních algoritmů	4
1.3.1	Paralelní čas	4
1.3.2	Paralelní cena	5
1.3.3	Paralelní práce	5
1.3.4	Paralelní zrychlení	6
1.3.5	Paralelní efektivnost	6
1.3.6	Paralelní režie	7
1.3.7	Shrnutí a příklad	7
1.3.8	Zdroje neefektivnosti paralelních algoritmů	8
1.4	Škálovatelnost paralelních algoritmů	9
1.4.1	Brentův simulační princip	9
1.4.2	Izoefektivnost paralelních algoritmů	11
1.4.3	Absolutně minimální paralelní čas	13
1.4.4	Spodní mez počtu procesorů pro dosažení časové optimality	14
1.5	Amdahlův a Gustafsonův zákon	14
2	Paralelní prohledávání stavového prostoru	16
2.1	Klasifikace sekvenčních DFS algoritmů	16
2.1.1	Kritéria pro návrat a pro ukončení DFS	16
2.1.2	Úplnost prohledávání stavového prostoru	19
2.1.3	Hloubka prohledávání stavového prostoru	19
2.1.4	Struktura zásobníku	21
2.2	Paralelní algoritmy pro DFS	22
2.2.1	Režie, efektivnost a anomálie paralelního DFS	22
2.2.2	Dynamické vyvažování výpočetní zátěže	23
2.2.3	Obecný paralelní DFS algoritmus	24
2.2.4	Algoritmy pro hledání dárce (AHD)	25
2.2.5	Algoritmy pro dělení zásobníku (ADZ)	26
2.2.6	Strategie průchodu stavovým prostorem a ukončování paralelního DFS	28
2.2.7	Algoritmy pro distribuované ukončení výpočtu (ADUV)	28
3	Paralelní architektury a modely	30
3.1	Taxonomie paralelních architektur	31

3.1.1	Taxonomie z hlediska toků instrukcí a dat	31
3.1.2	Taxonomie z hlediska organizace paměti	34
3.1.3	Taxonomie z hlediska propojovacích sítí	36
3.1.4	Shrnutí	36
3.2	Parallel Random Access Machine (PRAM) model	37
3.2.1	Random Access Machine (RAM) model	37
3.2.2	Základní definice PRAM modelu	37
3.2.3	Vlastnosti PRAM modelu	38
3.2.4	Omezené PRAM modely	39
3.2.5	Výpočetní síla PRAM podmodelů	40
3.2.6	Cena, optimalita a efektivnost PRAM algoritmů	40
3.2.7	Příklady PRAM algoritmů s konstantním časem	41
3.3	Simulace velkého PRAM na malém PRAM téhož typu	42
3.4	Simulace silnějšího PRAM na slabším	44
3.5	Asynchronní PRAM (APRAM)	47
3.5.1	APRAM výpočet	48
3.5.2	Výkonnostní parametry modelu APRAM	48
3.5.3	Bariérová synchronizace	49
3.5.4	Simulace PRAM na APRAM	49
3.6	Bulk Synchronous Parallel (BSP) Model	51
4	Propojovací sítě	53
4.1	Základní pojmy a terminologie	53
4.1.1	Abecedy a řetězce.	53
4.1.2	Teorie grafů	54
4.2	Požadavky na propojovací sítě	56
4.3	Striktně ortogonální topologie (mřížkové)	59
4.3.1	n -rozměrná binární hyperkrychle, Q_n	59
4.3.2	n -rozměrná mřížka o velikosti stran $z_1, z_2, \dots, z_n$, $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$	61
4.3.3	n -rozměrný toroid o velikosti stran $z_1, z_2, \dots, z_n$, $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$	63
4.4	Hyperkubické topologie	65
4.4.1	Kružnice propojené krychlí dimenze n , CCC_n	65
4.4.2	Zabalený motýlek dimenze n , wBF_n	66
4.4.3	Obyčejný motýlek dimenze n , dB_n	67
4.4.4	Nepřímé vícestupňové propojovací sítě	68
4.5	Stromové topologie	69
4.5.1	2-D mřížka stromů výšky n , MT_n	70
4.6	Posuvné topologie	71
4.6.1	Základní společné vlastnosti posuvných topologií	71
4.6.2	Orientovaná binární SE síť	72
4.6.3	Orientovaný de Bruijnův graf stupně d a dimenze n , $dB_{d,n}$	73
4.7	Nepravidelné sítě	74
5	Vnořování a simulace propojovacích sítí	76
5.1	Vnořovací problém	76
5.1.1	Základní definice a pojmy	76

5.1.2	Spodní meze na měřítka vnoření	78
5.2	Vnoření do hyperkrychle	78
5.2.1	Vnoření cest a kružnic	78
5.2.2	Vnoření stromů	79
5.2.3	Vnoření mřížek stromů	82
5.2.4	Vnoření mřížek a toroidů	83
5.2.5	Vnoření hyperkubických sítí	84
5.2.6	Vnoření ostatních grafů	84
5.3	Vnoření do mřížek a toroidů	85
5.3.1	Vnoření lineárních polí/kružnic do mřížek/toroidů vyšší dimenze	85
5.3.2	Vnoření mezi stejnými mřížkami a toroidy	85
5.3.3	Vnoření toroidů do toroidů	86
5.3.4	Vnoření mezi stejně velkými čtvercovými a obdélníkovými mřížkami . .	86
5.3.5	Vnoření mezi stejně velkými obdélníkovými mřížkami	87
5.3.6	Implementace binárních D&C výpočtů na 2-D mřížce	88
5.3.7	Jednovlnové D&C výpočty	88
5.3.8	Implementace vícevlňového D&C výpočtu na 2-D čtvercové mřížce . . .	89
5.4	Vnoření lineárního pole/kružnice do obecné sítě	89
5.5	Vnoření do hyperkubických topologií	90
5.5.1	Normální hyperkubické algoritmy	90
5.6	Vnoření do posuvných topologií	91
6	Prefixový součet a eulerovské cesty	94
6.1	Paralelní redukce	94
6.2	Paralelní prefixový součet nad polem dat	95
6.2.1	Paralelní prefixový součet na stromu	95
6.2.2	Paralelní prefixový součet na hyperkrychli	97
6.2.3	Paralelní prefixový součet na mřížkách a toroidech	98
6.2.4	Paralelní prefixový součet na EREW PRAM	99
6.2.5	Škálovatelnost paralelního prefixového součtu	99
6.3	Aplikace paralelního prefixového součtu	100
6.3.1	Zhušťovací problém na hyperkubických sítích	100
6.3.2	Paralelní RadixSort	100
6.3.3	Paralelní binární sčítačka s predikcí přenosu	101
6.3.4	Tridiagonální systém rovnic	102
6.4	Segmentový paralelní prefixový součet	103
6.4.1	Paralelní QuickSort založený na SPPS	104
6.5	Paralelní výpočty nad zřetěženými seznamy	105
6.5.1	Pořadí v seznamu	105
6.5.2	Výpočet pořadí pomocí přeskočů ukazatelů	105
6.5.3	Paralelní prefixový/postfixový výpočet nad zřetěženým seznamem . . .	107
6.5.4	Myšlenka škálovatelnosti výpočtu pořadí v zřetěženém seznamu	107
6.6	Technika eulerovských cest	107
6.6.1	Eulerovské cesty, grafy a stromy	107
6.6.2	Paralelní konstrukce eulerovských kružnic a cest	108

6.7	Aplikace techniky eulerovských cest	110
6.7.1	Nalezení všech rodičů paralelně	110
6.7.2	Výpočet velikostí všech podstromů paralelně I	110
6.7.3	Výpočet velikostí všech podstromů paralelně II	111
6.7.4	Výpočet úrovní všech uzlů paralelně	111
6.7.5	Výpočet číslování Preorder všech uzlů paralelně	112
7	Paralelní třídící algoritmy	113
7.1	Úvod do paralelního třídění	113
7.1.1	Třídící sítě	113
7.1.2	Škálovatelnost třídících algoritmů	115
7.1.3	Naivní PRAM třídící algoritmus	115
7.2	Datově necitlivé třídění a 0-1 třídící věta	116
7.3	Třídění na mřížkových sítích	118
7.3.1	Třídění sudo-lichými transpozicemi na lineárním poli	118
7.3.2	ShearSort na 2-D mřížce	119
7.3.3	Spodní mez složitosti hadovitého třídění na 2-D mřížce	121
7.3.4	Lexikografické třídění na 3-D mřížce $M(n, n, n)$	121
7.4	Třídění na hyperkubických sítích	123
7.4.1	Sudo-lichý MergeSort	123
7.4.2	Sudo-sudý MergeSort	126
7.4.3	Bitonický MergeSort	127
7.4.4	Implementace algoritmů MergeSort na hyperkubických sítích	129
7.4.5	Implementace Bitonického MergeSort na 2-D mřížce a PRAM	132
8	Směrovací algoritmy a techniky přepínání	133
8.1	Klasifikace komunikačních problémů	133
8.2	Architektura výpočetního uzlu a směrovače	134
8.3	Jednotky komunikace	135
8.4	Směrování a řízení toku zpráv	136
8.5	Klasifikace směrovacích algoritmů	136
8.5.1	Kdy a kde je prováděno směrovací rozhodnutí	136
8.5.2	Implementace směrovacích algoritmů	137
8.5.3	Adaptivita	138
8.5.4	Minimalita	138
8.5.5	Progresivnost směrování	138
8.6	Modely časové složitosti komunikačních operací	139
8.7	Základní techniky přepínání a řízení toku	140
8.7.1	Rámec předpokladů pro analýzu časové složitosti	140
8.7.2	Přepínání kanálů (CS)	140
8.7.3	Přepínání uloži-pošli-dál (SF)	141
8.7.4	Průřezové přepínání (VCT)	142
8.7.5	Červí přepínání (WH)	143
8.7.6	Zjednodušené výrazy pro komunikační zpoždění	144
8.7.7	Proč je WH přepínací důležité?	144
8.8	Zablokování	145

8.8.1	Zablokování v ortogonálních topologiích	145
8.8.2	Zablokování v nepravidelných topologiích	147
9	Permutace v mřížkách a hyperkubických sítích	149
9.1	Permutační směrování v 2-D mřížkách	149
9.1.1	Směrování 1-mnoha v 1-D mřížkách	149
9.1.2	Permutační směrování v 1-D mřížkách	150
9.1.3	XY permutační směrování v 2-D mřížkách	150
9.1.4	Vícerozměrné mřížky	151
9.1.5	Paměť vs. čas při realizaci permutací	151
9.2	Minimalizace paměti při permutacích v mřížkách	152
9.2.1	Randomizované permutační směrování	152
9.2.2	Permutační směrování založené na třídění	153
9.2.3	Off-line permutační směrování	154
9.3	On-line permutace v motýlku	157
9.3.1	Nejpomalejší on-line permutace	158
9.3.2	Bezkonfliktní permutace	160
9.4	Off-line směrování permutací v Benešově síti	163
9.4.1	Hranově disjunktní permutační cesty	164
9.4.2	Uzlově disjunktní permutační cesty	165
9.5	Off-line optimální permutace v přímém motýlku	165
9.6	Off-line simulace obecných topologií	167
10	Kolektivní komunikační algoritmy	169
10.1	Základní pojmy	169
10.1.1	Typy kolektivních komunikačních operací	169
10.1.2	Komunikační modely	169
10.1.3	Parametry pro měření komunikační složitosti	170
10.1.4	Příklad výpočtů spodních mezí	171
10.2	Vysílání jeden-všem v SF sítích	171
10.2.1	Výstupně všeportové vs. 1-portové SF sítě	172
10.2.2	EREW PRAM	172
10.2.3	Úplný graf a hyperkrychle	172
10.2.4	Mřížky	173
10.2.5	Toroidy	174
10.3	Vysílání jeden-všem ve WH sítích	174
10.3.1	Výstupně všeportové vs. 1-portové WH sítě	174
10.3.2	1-portová hyperkrychle	174
10.3.3	Výstupně všeportová hyperkrychle	174
10.3.4	1-portové mřížky	175
10.3.5	1-portové toroidy	176
10.3.6	Výstupně všeportové mřížky a toroidy	177
10.4	Vysílání ve skupině	178
10.4.1	Dimenzionálně uspořádané řetězce v hyperkrychlích	178
10.4.2	Mřížky	179
10.5	Rozesílání 1-všem (OAS)	179

10.5.1	OAS v nekombinujících sítích	180
10.5.2	OAS v kombinujících sítích	180
10.6	Vysílání všichni-všem (AAB)	182
10.6.1	SF AAB s kombinováním paketů	182
10.6.2	SF AAB bez kombinování paketů	185
10.6.3	AAB ve WH sítích	186
10.7	Rozesílání všichni-všem (AAS)	187
10.7.1	SF AAS s kombinováním paketů	187
10.7.2	WH AAS s kombinováním paketů	189
10.7.3	WH AAS bez kombinování paketů	190
11	Paralelní algoritmy pro lineární algebru	192
11.1	Základní definice	192
11.2	Základní způsoby mapování matic	192
11.2.1	Proužkové mapování	193
11.2.2	Šachovnicové mapování	193
11.3	Transpozice matice	194
11.3.1	Transpozice matice v SF 2-D mřížce	194
11.3.2	Transpozice matice v WH 2-D mřížce	194
11.3.3	Transpozice matice v hyperkrychli	195
11.4	Násobení matice s vektorem	196
11.4.1	Proužkové mapování po řádcích	196
11.4.2	Proužkové mapování po sloupcích	196
11.4.3	Šachovnicové mapování	197
11.5	Násobení matic	198
11.5.1	Naivní algoritmus	198
11.5.2	Méně naivní algoritmus	198
11.5.3	Cannonův algoritmus	199
11.5.4	Foxův algoritmus $\equiv$ Broadcast-Multiply-Roll (BMR)	200
11.6	Řešení speciálních soustav lineárních rovnic	200
11.6.1	Trojúhelníková soustava rovnic	200
11.6.2	Tridiagonální soustava rovnic a sudo-lichá redukce	201
11.7	Paralelní přímé metody pro řešení soustav rovnic	203
11.7.1	LU dekompozice	203
11.7.2	Implementace paralelní LU dekompozice	204
11.8	Iterační metody pro řešení soustav rovnic	205
11.8.1	Sekvenční iterační metody	205
11.8.2	Paralelní Jacobiho iterační metoda	206
11.8.3	Paralelní Gauss-Seidelova iterační metoda	207
11.9	Parciální diferenciální rovnice	207
11.9.1	Diskretizace parciální diferenciální rovnice	208
11.9.2	Řešení paralelním Jacobiho algoritmem	208
11.9.3	Řešení paralelním Gauss-Seidelovým algoritmem	209
11.9.4	Vysoce paralelní Gauss-Seidelův algoritmus	209
11.9.5	Diskretizace jiných diferenciálních rovnic a jejich paralelní řešení	210

12 Teorie paralelní složitosti	212
12.1 Základní pojmy teorie složitosti	212
12.1.1 Optimalizační a rozhodovací abstraktní problémy	212
12.1.2 Kódování a konkrétní problémy	213
12.1.3 Jazyky, přijatelnost, a rozhodnutelnost	213
12.1.4 Třída NP , polynomiální redukce a NP -úplnost	214
12.2 Dobrá paralelizovatelnost	216
12.2.1 NC -algoritmy	217
12.2.2 Kritika teorie NC -třídy	218
12.3 Špatná paralelizovatelnost	219
12.3.1 Základní myšlenka P -úplnosti	219
12.3.2 NC -redukce a P -úplnost	219
12.3.3 Důkazy P -úplnosti	221
12.4 Příklady P -úplných problémů	221
12.4.1 Problém CV = základní P -úplný problém	221
12.4.2 Varianty problému CV	222
12.4.3 Maximální toky v síti	222
12.4.4 Algebraické problémy	224
12.4.5 Formální jazyky	224
12.4.6 Lineární algebra	224
12.4.7 Výpočetní geometrie	224
12.4.8 Lineární programování	225
12.4.9 Teorie grafů	225
12.4.10 Logické programování	226