

Hein Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen

Eine einführende Darstellung der wichtigsten Methoden und Ergebnisse aus der Theorie der klassischen (linearen) Gruppen fehlte bislang in deutschsprachigen Lehrbüchern. Indem der Autor die klassischen Gruppen sowohl mit algebraischen, wie auch mit Lieschen (infinitesimalen) Methoden studiert, schließt er diese Lücke.

Besonderer Wert liegt auf einer ausführlichen Erläuterung des Zusammenspiels der Gruppen und ihrer Lie-Algebren, die das Kernstück der Lieschen Theorie ausmachen. In dieser Hinsicht dient das Buch auch als Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen; zur Parametrisierung wird dabei ausschließlich die Matrix-Exponentialabbildung verwandt, wodurch ganz auf den aufwendigen Apparat der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten verzichtet werden kann.

Eine Fülle von Beispielen und Übungsaufgaben dienen zur Vertiefung des Gelernten. Inhaltlich schließt der Text unmittelbar an die Grundvorlesungen über Analysis und Lineare Algebra an.

Kapitel I. Die klassischen Gruppen	1
§ 1 Grundlagen der allgemeinen Gruppentheorie	2
1. Grundbegriffe	2
2. Beispiele und Ergänzungen	5
3. Operationen von Gruppen auf Mengen	9
4. Beispiele und Ergänzungen	11
Aufgaben	15
§ 2 Die allgemeine und die spezielle lineare Gruppe	16
1. Die Algebra $\text{Mat}(n, K)$	16
2. Die Gruppen $\text{GL}(n, K)$ und $\text{SL}(n, K)$	18
3. Die gewöhnliche Operation von $\text{GL}(n, K)$	19
4. Jordan-Chevalley-Zerlegung in $\text{GL}(n, K)$	20
5. Erzeugung von $\text{SL}(n, K)$ durch Elementarmatrizen	22
6. Kommutatorgruppe von $\text{GL}(n, K)$ und $\text{SL}(n, K)$	24
7. Zentrum von $\text{GL}(n, K)$ und $\text{SL}(n, K)$, projektive Gruppen	25
8. Normalteiler in $\text{SL}(2, K)$	28
9. Zusammenhang	29
10. Quaternionen, die Gruppen $\text{GL}(n, \mathbb{H})$ und $\text{SL}(n, \mathbb{H})$	31
Aufgaben	36
§ 3 Symmetrische Bilinearformen und Hermitesche Formen	37
1. Hermitesche Formen und Matrizen	37
2. Isometrien Hermitescher Räume	40
3. Orthogonalität, Normalformen	41
4. Euklidische und unitäre Räume	45
5. Isometriegruppen Hermitescher Räume	48
Aufgaben	49
§ 4 Orthogonale und unitäre Gruppen	51
1. Die Gruppen $\text{SO}(p, q)$, $\text{SO}(n, \mathbb{C})$ und $\text{SU}(p, q)$	51
2. Beispiele: Die Gruppen $\text{O}(2)$, $\text{O}(1, 1)$, $\text{SO}(3)$ und $\text{SU}(2)$	53
3. Konjugationsklassen, maximale Tori, Weyl-Gruppen	58

4. Anwendung: Zentrum von $U(n)$, $SU(n)$ und $SO(n)$	64
5. Normalteiler in $SU(2)$	65
6. Spiegelungen, Transitivität von $O(V, h)$ auf Sphären	66
7. Erzeugung von $O(V, h)$ durch Spiegelungen	68
8. Erzeugung von $U(V, h)$ durch Quasi-Spiegelungen	68
9. Zusammenhang von $SO(V, h)$ und $U(V, h)$	69
10. Bewegungsgruppe des \mathbb{R}^n , Galilei-Gruppe	70
11. Iwasawa-Zerlegung	72
12. Polar- und Cartan-Zerlegung	72
13. Lorentz-Gruppe und Minkowski-Raum	73
14. Isomorphie der Lorentz-Gruppe mit $SL(2, \mathbb{C})/\{E\}$ und $SO(3)$ mit $SU(2)/\{E\}$	76
15. Beschreibung von $O(4)$ (und $O(3)$) durch Quaternionen, Nicht-Einfachheit von $SO(4)/\{E\}$	78
16. Hermitesche Formen auf \mathbb{H}^n und die Gruppen $U(p, q; \mathbb{H})$	79
Aufgaben	80
§ 5 Symplektische Gruppen	82
1. Grundbegriffe	82
2. Zerlegung in hyperbolische Ebenen, Normalformensatz	83
3. Die symplektische Gruppe $Sp(2n, \mathbb{K})$	84
4. Anwendung: Hamiltonsche Gleichungen und ihre Invarianten	85
5. Erzeugung von $Sp(V, s)$ durch Transvektionen, die Inklusion $Sp(2n, \mathbb{K}) \subset SL(2n, \mathbb{K})$, Zusammenhang	86
6. Die Gruppe $Sp(2n)$	88
7. Konjugationsklassen, maximaler Torus und Weyl-Gruppe von $Sp(2n)$	89
8. Eine anti-Hermitesche Form auf \mathbb{H}^n und die Gruppe $U_\alpha(n, \mathbb{H})$..	91
9. Zusammenstellung der klassischen Gruppen	91
Aufgaben	93
Kapitel II. Abgeschlossene Untergruppen von $GL(n, \mathbb{K})$	95
§ 1 Die Matrix-Exponentialabbildung	96
0. $Mat(n, \mathbb{K})$ als metrischer Raum	96
1. Konvergenz und lokale Umkehrbarkeit der Exponentialabbildung	99
2. Rechenregeln	102
3. Einparametergruppen	102
4. Die Gleichung $\exp X \exp Y = \exp h(X, Y)$	104
Aufgaben	105
§ 2 Lineare Gruppen und ihre Lie-Algebren	106
1. Definition, Beispiele	106

2. Die Lie-Algebren der klassischen Gruppen	108
3. Die Abbildung $\exp_G : \mathcal{L}G \rightarrow G$ für einige klassische Gruppen ..	110
4. Lineare Gruppen	112
5. Die Lie-Algebren linearer Gruppen	113
6. Die Exponentialabbildung einer linearen Gruppe	115
7. Die von $\exp_G(\mathcal{L}G)$ erzeugte Untergruppe von G , Zusammenhang ..	116
8. $\mathcal{L}G$ als Tangentialraum	119
9. Die Lie-Algebren der Poincaré- und Galilei-Gruppe	120
Aufgaben	122
 § 3 Homomorphismen linearer Gruppen und ihrer Lie-Algebren	124
1. Die Gleichung $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathcal{L}f$	124
2. Funktorielle Eigenschaften	126
3. Maximal-kompakte Untergruppen	129
4. Lokale Isomorphie	131
5. Einfacher Zusammenhang und universelle Überlagerungsgruppe ..	134
Aufgaben	136
 Kapitel III. Darstellungen der klassischen Gruppen	139
 § 1 Grundlagen der allgemeinen Darstellungstheorie von Gruppen	140
1. Grundlegende Begriffe und Beispiele	140
2. Reduzibilität, direkte Summen	142
3. Unitäre Darstellungen	144
4. Kontragradienten und konjugiert-komplexe Darstellung	146
5. Morphismen, Lemma von Schur	148
6. Tensorprodukte	151
7. Isotypische Zerlegung	159
8. Die Algebra $\text{End}_G(V)$ und ihre Darstellungen	162
9. Gruppen mit invariante Mittelbildung, Charaktere	171
10. Invariante Bilinear- und Sesquilinearformen	179
Aufgaben	182
 § 2 Darstellungstheorie der klassischen Gruppen (globale Methode)	184
1. Darstellungen der symmetrischen Gruppen S_k	184
2. Der S_k -Modul $V^{\otimes k}$ und die Darstellungen von $\text{End}_{S_k} V^{\otimes k}$	189
3. Der $\text{GL}(V)$ -Modul $V^{\otimes k}$, Darstellungen von $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\text{SL}(n, \mathbb{C})$	192
4. Darstellungen von $\text{O}(n, \mathbb{C})$ und $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$	198
5. Darstellungen von $\text{SO}(n, \mathbb{C})$	203
6. Darstellungen der reellen klassischen Gruppen	205
Aufgaben	206

Kapitel IV. Halbeinfache komplexe Lie-Algebren	209
§ 1 Von der Darstellungstheorie linearer Gruppen zur Darstellungstheorie von Lie-Algebren	210
1. Die Ableitung $\mathcal{L}\rho$ der Darstellung einer linearen Gruppe	210
2. Beispiel: Die adjungierte Darstellung	213
3. Komplexifizierung von Lie-Algebren und Darstellungen	215
4. Vollständige Reduzibilität der klassischen Gruppen und Algebren	218
Aufgaben	219
§ 2 Halbeinfache Lie-Algebren	220
1. Die Killing-Form	220
2. Wurzelraumzerlegung	223
3. Wurzelraum-Zerlegung von $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ und $sp(n, \mathbb{C})$	229
Aufgaben	234
§ 3 Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren	235
1. Zerlegung in Gewichtsräume	235
2. Die irreduziblen Darstellungen von $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{C})$ und $sp(n, \mathbb{C})$	239
Aufgaben	242
Literatur	245
Symbolverzeichnis	247
Namenverzeichnis	249
Sachverzeichnis	251