

OBSAH

1.	ZÁKLADNÉ MYŠLIENKY (M. Hejný, J. Vantuch)	19
1.1	Teória vyučovania matematiky	19
1.1.1	Ciele tejto knihy	19
1.1.2	Koncepcia tejto knihy	19
1.1.3	Matematika kontra didaktika	20
1.1.4	Princíp stratégie učiteľovej práce	21
1.1.5	Postojová stratégia učiteľa	21
1.1.6	Dialogická stratégia učiteľa	22
1.1.7	Mechanizmus poznávacieho procesu	23
1.1.8	Deformácie poznávacieho procesu	24
1.1.9	Diagnostika a reedukácia formalizmu	24
1.1.10	Vzťah fylogénzy a ontogénzy (matematického) myslenia	25
1.2	Jazyk matematiky	26
1.2.1	Genéza symboliky	27
1.2.2	Genéza terminológie	28
1.2.3	Pojmotvorný proces	28
1.2.4	Ontogénza pojmu kružnica	29
1.2.5	Jazyk matematiky ako metodický problém	29
1.2.6	Slovám či znakom je priradená chybná predstava	30
1.2.7	Zisťovanie a odstraňovanie chybných predstáv	31
1.2.8	Slovám či znakom nie je priradená predstava	32
1.2.9	Predstavám chýba jazykové vyjadrenie	33
1.2.10	Presnosť matematického jazyka	35
1.3	Komunikácia	36
1.3.1	Písomná komunikácia	36
1.3.2	Ústna komunikácia	37
1.3.3	Tvorba dialógu	37
1.3.4	Motivujúce experimenty	38
1.4	Jazyk teórie množín	39
1.4.1	Od Bolzana po Bourbakiho	39
1.4.2	Ako sa dostali množiny do škôl	40
1.4.3	Aký bol ďalší osud množín v škole	41
1.4.4	Aké z toho vyplýva poučenie?	41
1.4.5	Funkčnosť množinového jazyka	42
1.4.6	Hlbšie porozumenie pojmu množina	43
1.5	Logika	44
1.5.1	Korene logického myslenia	44
1.5.2	Nedostatky spontánnej logiky	45
1.5.3	Vznik logiky ako vedeckej disciplíny	46
1.5.4	Zákon sporu a zákon vylúčeného tretieho	47
1.5.5	Hľadanie tretej hladiny logického myslenia	48

1.5.6	Zákon totožnosti (rovnosti, identity)	49
1.5.7	Tretia hladina logického myslenia	49
1.5.8	Logika v učive základnej a strednej školy	50
1.5.9	Formálna logika.	51
1.5.10	Rozvoj logického myslenia	52
2.	MNOHOSTĚ (V. Repáš, M. Hejný)	56
2.1	Vznik mnohostných predstáv	56
2.1.1	Dve poučné epizódy	56
2.1.2	Žiak ako čierna schránka	56
2.1.3	Kde urobil Kubo chybu?	58
2.1.4	Genéza mnohostných predstáv.	58
2.1.5	Deformácia poznávacieho procesu mnohosti	59
2.2	Prirodzené čísla	60
2.2.1	Ordinálne číslo a kardinálne číslo	60
2.2.2	Opis experimentu	61
2.2.3	Vyhodnotenie experimentu	63
2.2.4	Tri podoby čísla	65
2.2.5	Dva postupy pri sčítovaní.	67
2.2.6	Metodika sčítovania	68
2.3	Zlomky, racionálne čísla (nezáporné)	68
2.3.1	Modely	68
2.3.2	Základ a jeho časť	69
2.3.3	Porovnávanie zlomkov	71
2.3.4	Percentá	72
2.3.5	Trojčlenka	73
2.3.6	Sčítovanie častí	74
2.3.7	Od sčítovania častí k sčítovaniu zlomkov	76
2.3.8	Sčítovanie zlomkov — geometrické modely	76
2.3.9	Násobenie zlomkov	78
2.3.10	Delenie zlomkov.	79
2.3.11	Zlomky a desatinné čísla	81
2.4	Záporné čísla	83
2.4.1	História	83
2.4.2	Modely	86
2.4.3	Sčítovanie a odčítovanie	87
2.4.4	Násobenie	88
2.5	Reálne čísla	90
2.5.1	Čo je to reálne číslo?	90
2.5.2	Modely reálnych čísel	91
2.5.3	Príklady	92
2.5.4	Cesta k abstrakcii	93
3.	TEÓRIA ČÍSEL A ČÍSELNÉ SÚSTAVY (J. Vantuch, H. Bereková)	98
3.1	Genéza desiatkovej pozičnej číselnej sústavy.	98
3.1.1	Začiatky	98

3.1.2	Grécko	99
3.1.3	Vznik pozičnej sústavy	100
3.1.4	India	101
3.1.5	Prečo desiatka?	102
3.2	Číselné sústavy vo vyučovaní	104
3.2.1	Paralela fylogénézy a ontogenézy	104
3.2.2	Motivačná rozprávka, 1. časť	105
3.2.3	Motivačná rozprávka, 2. časť	107
3.3	Čriečky histórie	115
3.3.1	Päť mien	115
3.3.2	Dokonalé čísla	117
3.4	Teória čísel v škole	118
3.4.1	Možnosti	118
3.4.2	Stretnutie Pytagora s Aritmetikou, Geometriou, Filozofiou a Hudbou	118
3.4.3	Komentár k rozprávke	120
3.4.4	Deliteľnosť — modely	121
3.4.5	Deliteľnosť — pravidlá	122
3.4.6	Grafické znázornenie deliteľnosti	124
3.4.7	Najväčší spoločný deliteľ	125
3.4.8	Najmenší spoločný násobok	126
3.4.9	Otvorené problémy	128
4.	ALGEBRICKÉ VÝRAZY (P. Bero, M. Hejný)	138
4.1	Fylogénéza	138
4.1.1	Babylonská úloha	138
4.1.2	Vecný rozbor úlohy	139
4.1.3	Metodický rozbor úlohy	140
4.1.4	Geometrický jazyk matematiky	140
4.1.5	Diofantova úloha	142
4.2	Algebraické výrazy — reč písmen	143
4.2.1	Tri hladiny reči písmen	144
4.2.2	Modelovanie	144
4.2.3	Význam štandardnej manipulácie	146
4.2.4	Ako naučiť žiakov štandardným manipuláciám	146
4.2.5	Dve úskalía štandardnej manipulácie	147
4.2.6	Strategická manipulácia	149
4.2.7	Tri metódy	150
4.3	Žiacke predstavy o algebraických výrazoch	152
4.3.1	Predstavy maturantov o algebraických výrazoch	152
4.3.2	Schopnosť žiakov použiť jazyk symbolov	152
4.3.3	Ukážky odpovedí žiakov	153
4.3.4	Komentár k ukážkam	154
4.3.5	Klasifikácia chýb v úpravách algebraických výrazov	155
4.3.6	Analýza chýb	156
4.4	Algebraické identity	158
4.4.1	Čo je identita?	158

4.4.2	Odkiaľ prichádzajú identity?	160
4.4.3	Zovšeobecňovanie identít	161
4.4.4	Svet krásnych forém	163
4.5	Algebrické nerovnosti	164
4.5.1	Pôvod nerovnosti	164
4.5.2	Nerovnosti v učive matematiky	165
4.5.3	Číselné nerovnosti	167
4.5.4	Nerovnosti výrazov, dôkazy	168
4.5.5	Úprava nerovnosti na očividný tvar	169
4.5.6	Rozklad nerovnosti	171
4.5.7	Metóda substitúcie	172
4.5.8	Metóda rekurzie a indukcie	174
4.5.9	Metóda funkčného prístupu	175
4.5.10	Metóda konvexných a konkávných funkcií	177
5.	ROVNICE A NEROVNICE (L. Hrdina)	190
5.1	Základné pojmy, ciele a problémy	190
5.1.1	Príklady	190
5.1.2	Pojem rovnice	192
5.1.3	Úlohy rovnícového charakteru	192
5.1.4	Ciele vyučovania rovníc	193
5.1.5	Všeobecné úvahy	194
5.1.6	Fylogénéza rovníc	194
5.2	Metódy riešenia rovníc	196
5.2.1	Pokus — omyl	196
5.2.2	Tabuľková metóda	196
5.2.3	Zámerná predmetná manipulácia	198
5.2.4	Kalkul	199
5.3	Ekvivalentné a neekvivalentné úpravy rovníc	200
5.4	Štandardné typy rovníc a spôsoby ich riešenia	201
5.4.1	Lineárne rovnice s jednou neznámou	201
5.4.2	Slovné rovnice	202
5.4.3	Kvadratické rovnice	204
5.4.4	Rovnice s absolútnymi hodnotami	206
5.4.5	Rovnice s parametrom	208
5.4.6	Sústavy lineárnych rovníc	209
5.4.7	Iracionálne rovnice	211
5.4.8	Algebrické rovnice vyššieho stupňa	212
5.4.9	Exponenciálne a logaritmické rovnice	213
5.4.10	Goniometrické rovnice	215
5.5	Nerovnice	217
5.5.1	Prvé skúsenosti	217
5.5.2	Rovnice a nerovnice	218
5.5.3	Metodika nerovnic	219
5.5.4	Nerovnice $ x - a < b$, resp. $ x - a \leq b$	220

5.5.5	Polynomicke nerovnice	221
5.5.6	Iracionalne nerovnice	223
5.5.7	Goniometricke nerovnice	224
5.5.8	Súbor ďalších nerovnic	225
6.	ANALÝZA (P. Bero)	238
6.1	Fylogenéza funkčného myslenia	238
6.1.1	Starovek	238
6.1.2	Stredovek	238
6.1.3	Sedemnásťte storočie	239
6.2	Funkcie v škole	240
6.2.1	Ontogenéza	240
6.2.2	Štúdium analýzy na strednej škole	241
6.2.3	Kvadratické funkcie	241
6.2.4	Logaritmické a exponenciálne funkcie	242
6.2.5	Goniometrické funkcie	244
6.2.6	Spojitosť	245
6.2.7	Vlastnosti funkcií	245
6.2.8	Graf funkcie	246
6.2.9	Zavedenie pojmu funkcia	247
6.2.10	Ktorý spôsob je vhodnejší?	248
6.3	Fylogenéza infinitezimálneho myslenia u Grékov	249
6.3.1	Namiesto úvodu	249
6.3.2	Prvé skúsenosti a pochybnosti	250
6.3.3	Exhaustívna metóda	251
6.3.4	Archimedes ako osobnosť	252
6.3.5	Kvadratura paraboly	252
6.3.6	Najväčší objav Archimeda	253
6.4	Čakanie na Keplera	255
6.4.1	Nová predstava nekonečna	255
6.4.2	Akú predstavu nekonečna majú žiaci?	257
6.4.3	Galileo Galilei	258
6.4.4	Metodický komentár k dialógu z článku 6.4.3	260
6.5	Od Keplera k Newtonovi a Leibnizovi	261
6.5.1	Bozk pre princeznú	261
6.5.2	Keplerova metóda	262
6.5.3	Vplyv vínných sudov na vyučovanie matematiky	263
6.5.4	Bonaventura Cavalieri	265
6.5.5	Evangelista Torricelli	267
6.6	Propedeutika derivácie	268
6.6.1	Dotyčnica — základný model derivácie	268
6.6.2	Prvé problémy	269
6.6.3	Útok na inflexiu	270
6.6.4	Umenie zanedbávania	272
6.6.5	Historické poznámky	273

6.7	Analýza nekonečne malých	275
6.7.1	Úvod	275
6.7.2	Isaac Newton a jeho teória fluxii	275
6.7.3	Riešenie úloh v teórii fluxii	276
6.7.4	Metóda prvých a posledných pomerov	277
6.7.5	Počet, ktorý nazývam diferenciálny	279
6.7.6	Ako Leibniz počítal	280
6.7.7	Mocninové rady	281
7.	PLANIMETRIA (M. Hejný)	293
7.1	Predgrécke obdobie	293
7.1.1	Pramene geometrie	293
7.1.2	Výsledky	293
7.2	Pytagoras	294
7.2.1	Osobnosť a jej význam	294
7.2.2	Geometrizácia aritmetiky	295
7.2.3	Metóda tvarovej pséfoforie	296
7.2.4	Veľký kvantifikátor	298
7.2.5	Od sukcesie ku gestaltu	299
7.2.6	Argumentácia a dôkaz	300
7.2.7	Komentár k scénke	302
7.2.8	Objav iracionálneho čísla	303
7.2.9	Metóda nekonečného regresu a metóda minimálneho prvku	305
7.3	Od Pytagora k Euklidovi	307
7.3.1	Prehľad myšlienok	307
7.3.2	Motivácia	307
7.3.3	Duplicita kocky	308
7.3.4	Kvadratura kruhu	308
7.3.5	Trisekcia uhla	310
7.3.6	Konštrukcia pravidelných n -uholníkov	312
7.3.7	Rektifikácia kružnice	312
7.3.8	Metódy práce	313
7.3.9	Matematické techniky	314
7.4	Euklides z Alexandrie	318
7.4.1	Osobnosť a jej význam	318
7.4.2	Chvála nedôvery	318
7.4.3	Scénka	319
7.4.4	Rozvoj argumentácie	320
7.4.5	Základy — euklidovská koncepcia matematiky	321
7.4.6	Euklidove nedostatky	322
7.5	Metodika planimetrie	323
7.5.1	Niekoľko otázok	323
7.5.2	Štruktúra školskej geometrie	324
7.5.3	Geometria a svetonázor	324
7.5.4	Experimentovanie	326

7.6	Konštrukcie	327
7.6.1	Geometrické konštrukcie vo vyučovaní	327
7.6.2	Umenie dívať sa	327
7.6.3	Zápis, dôkaz, diskusia	328
7.6.4	Upresnenie pojmu planimetrickej konštrukcie	329
7.6.5	Hra na programátora	330
7.6.6	Zadné vrátka	331
7.7	Vety a vzorce	335
7.7.1	Príklady	335
7.7.2	Metodická analýza príkladov	336
7.7.3	Vety	336
7.7.4	Vzorce	337
7.8	Argumentácia	339
7.8.1	Príklady	339
7.8.2	Ontogenéza argumentácie	340
7.8.3	Lokálny dôkaz	342
7.8.4	Axiomatický dôkaz	342
8.	STEREOMETRIA (V. Repáš)	353
8.1	Čo je stereometria	353
8.1.1	Priestorová predstavivosť — jeden z cieľov stereometrie	353
8.1.2	Rozdiel cieľov vyučovania planimetrie a stereometrie	354
8.1.3	Planimetria versus stereometria, alebo, prečo nám to v stereometrii tak nejde	354
8.1.4	Analýza obrázka	355
8.1.5	Metodické poučenie	357
8.1.6	Klasifikácia problematiky stereometrie a jej metodické odôvodnenie	358
8.2	História	361
8.2.1	Začiatky	361
8.2.2	Vstup Grékov	361
8.2.3	Délsky problém	362
8.2.4	Grécky prístup k stereometrickému problému	363
8.2.5	Posledné tri knihy Euklidových Základov	364
8.2.6	Niekoľko mien a myšlienok	365
8.3	Metodika stereometrie	367
8.3.1	Dve koncepcie	367
8.3.2	Nebezpečenstvo premeškania lehoty	368
8.3.3	Telesá z kociek	369
8.3.4	Siete telies	371
8.3.5	Pohyby telesa	374
8.3.6	Geometria povrchu telesa; pohyb vnútri telesa	375
8.3.7	Rezy telies	376
8.3.8	Skladanie a rozkladanie telies	378
8.3.9	Meranie objemov a povrchov telies	378
8.3.10	Iné merania	381
8.3.11	Kúzelná formula	382
8.3.12	Pojem mnohosten a Eulerova veta	382

8.3.13	Priamka a rovina, priestorové transformácie	385
8.3.14	Axiomatizácia poznatkov	386
8.4	Experimenty	387
8.4.1	Teleso — symbol	387
8.4.2	Úlohy experimentu	387
8.4.3	Metódy riešenia	388
8.4.4	Poznámky k experimentu	389
8.4.5	Pohľady na teleso	389
8.4.6	Diagnostika rozvoja stereometrických predstáv	390
9.	ANALYTICKÁ GEOMETRIA (AG) (M. Hejný)	396
9.1	Fylogénéza	396
9.1.1	Číslo a tvar	396
9.1.2	História objavu	396
9.1.3	René Descartes	397
9.1.4	Filozofický a matematický význam objavu analytickej geometrie	398
9.1.5	Analytická geometria — nová metóda v geometrii	398
9.1.6	Vznik vektorového počtu	400
9.2	Propedeutika analytickej geometrie	401
9.2.1	Prehľad myšlienok	401
9.2.2	Šachovnicové adresovanie	401
9.2.3	Práca na štvorčekovanom papieri	402
9.2.4	Aritmetizácia	403
9.2.5	Súradnice v rovine a graf lineárnej závislosti	404
9.3	Metóda súradníc	406
9.3.1	Koncepcia vyučovania analytickej geometrie	406
9.3.2	Príprava súradnicového myslenia	406
9.3.3	Metóda transformácie problému	407
9.3.4	Tri kolinéarne body	409
9.3.5	Rovnica priamky	411
9.3.6	Záver metódy súradníc	412
9.3.7	Písomná previerka	412
9.4	Metóda vektorová	414
9.4.1	Pojem vektora	414
9.4.2	Zavedenie vektora	415
9.4.3	„Cestovanie“ — predmetná predstava manipulácie s vektormi	417
9.4.4	Lineárna závislosť (nezávislosť) vektorov	419
9.4.5	Od algebry k aritmetike	420
9.5	Priestor	423
9.5.1	Sústava súradníc a rovnica priamky	423
9.5.2	Rovnica roviny	424
9.5.3	Priesečník priamky s rovinou	425
9.5.4	Kolmosť	426
9.5.5	Skalárny súčin a jeho geometrický význam	427
9.5.6	Kužeľosečky	427

9.6	Závery	428
9.6.1	Analytická geometria ako syntéza	429
9.6.2	Analytická geometria nie je súbor poznatkov a návodov	429
9.6.3	Rytmus vyučovania analytickej geometrie	430
9.6.4	Nosné pojmy analytickej geometrie	431
9.6.5	Zmena názoru	432
10.	TRIGONOMETRIA A KOMPLEXNÉ ČÍSLA (M. Hejný)	438
10.1	Trigonometria a goniometria	438
10.1.1	Začiatky	438
10.1.2	Nástup Grékov	439
10.1.3	Trigonometria sa stáva vedou	440
10.1.4	Geometria na sfére	442
10.1.5	Menelaos z Alexandrie	443
10.1.6	Klaudios Ptolemaios	445
10.1.7	Indická a arabská trigonometria	447
10.1.8	Európska trigonometria	447
10.1.9	Sila vektorového počtu	449
10.1.10	Záver	451
10.2	Vyučovanie trigonometrie a goniometrie	451
10.2.1	Koncepcia trigonometrie	451
10.2.2	Zavedenie goniometrických funkcií	452
10.2.3	Trigonometria ako súčasť planimetrie	453
10.2.4	Goniometria ako manipulácia so vzorcami	454
10.3	Komplexné čísla	457
10.3.1	Načo?	457
10.3.2	Príčiny náročnosti	458
10.3.3	Motivácia	458
10.3.4	Ars Magna	459
10.3.5	Ars Magna a komplexné čísla	461
11.	KOMBINATORIKA, ŠTATISTIKA, PRAVDEPODOBNOSŤ (M. Hejný)	472
11.1	Kombinatorika	472
11.1.1	Úvod	472
11.1.2	Analýza štyroch riešení	473
11.1.3	Kombinatorická situácia	473
11.1.4	Organizačný princíp	474
11.1.5	Štyri techniky hľadania princípu Φ	475
11.1.6	Príklad	476
11.2	Pravdepodobnosť	479
11.2.1	História	479
11.2.2	Vyučovanie pravdepodobnosti	480
11.2.3	Pravdepodobnosť a informácia	482
11.3	Štatistika	484
11.3.1	Začiatok	484

11.3.2	Kto hľadá, nájde	485
11.3.3	Príprava pokusu	485
11.3.4	Pokus	486
11.3.5	Záver	486
12.	ŠTYRI DODATKY (M. Benešová)	488
12.1	Pickov vzorec	488
12.1.1	Motivácia	489
12.1.2	Etapa separovaných modelov	489
12.1.3	Od separovaných modelov k univerzálnym	490
12.1.4	Etapa univerzálnych modelov	490
12.1.5	Poznanie a jeho kryštalizácia	491
12.1.6	Dôkaz	492
12.1.7	Pojem mnohouholníka	492
12.2	Neriešiteľnosť	493
12.2.1	Dva významy slova „neriešiteľnosť“	493
12.2.2	Význam myšlienok o neriešiteľnosti	494
12.2.3	Prezretie množiny všetkých možností	495
12.2.4	Využitie deliteľnosti	496
12.2.5	Využitie Dirichletovho princípu	497
12.2.6	Metóda invariantu	497
12.3	Konštruovateľnosť a nekonštruovateľnosť	499
12.3.1	Myšlienka dôkazu nekonštruovateľnosti	499
12.3.2	Formalizácia euklidovskej konštrukcie	502
12.3.3	Konštrukcia pentagónu	503
12.3.4	Algebrizácia	504
12.3.5	Myšlienka dôkazu euklidovskej konštruovateľnosti (nekonštruovateľnosti)	505
12.3.6	Nekonštruovateľnosť	506
12.3.7	Konštruovateľnosť	507
12.3.8	Algebrický dôkazok	508
12.3.9	Klasické problémy staroveku	509
12.4	Optimalizácia	510
12.4.1	Úvod	510
12.4.2	Optimalizácia pomocou geometrických transformácií a trojuholníkovej nerovnosti	510
12.4.3	Metóda hraničnej hladiny	512
12.4.4	Svetelný lúč hľadá optimálne riešenie	515
12.4.5	Princíp minimálnej potenciálnej energie	515
12.4.6	Fermatova metóda hľadania extrémov	517
12.4.7	Na záver	519
	LITERATÚRA	524
	ŠKOLSKÁ LITERATÚRA	529
	REGISTER	535
	MENNÝ REGISTER	553