

# Obsah

## Obsah

|                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Předmluva k českému vydání . . . . .                                                                                | 9         |
| Předmluva k druhému vydání . . . . .                                                                                | 10        |
| Předmluva k prvnímu vydání . . . . .                                                                                | 11        |
| Seznam označení . . . . .                                                                                           | 13        |
| Úvod . . . . .                                                                                                      | 15        |
| <b>Kapitola 1. Základní poznatky z teorie diferenčních schémat . . . . .</b>                                        | <b>23</b> |
| 1.1. Základní operátory a operátory adjungované . . . . .                                                           | 23        |
| 1.1.1. Odhady norem některých matic . . . . .                                                                       | 27        |
| 1.1.2. Výpočet hranic spektra pozitivně definitní matice . . . . .                                                  | 28        |
| 1.1.3. Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru . . . . .                                                | 36        |
| 1.1.4. Vlastní čísla a vlastní vektory diferenčního analogu Laplaceova operátoru. . . . .                           | 38        |
| 1.2. Aproximace . . . . .                                                                                           | 42        |
| 1.3. Stabilita diferenčních schémat . . . . .                                                                       | 49        |
| 1.4. Věta o konvergenci . . . . .                                                                                   | 57        |
| <b>Kapitola 2. Metody konstrukce diferenčních schémat pro diferenciální rovnice . . . . .</b>                       | <b>60</b> |
| 2.1. Variační metody v matematické fyzice . . . . .                                                                 | 61        |
| 2.1.1. Některé úlohy variačního počtu . . . . .                                                                     | 61        |
| 2.1.2. Ritzova metoda . . . . .                                                                                     | 68        |
| 2.1.3. Galerkinova metoda . . . . .                                                                                 | 72        |
| 2.1.4. Metoda nejmenších čtverců . . . . .                                                                          | 76        |
| 2.2. Metoda integrálních identit . . . . .                                                                          | 78        |
| 2.2.1. Sestavení diferenčních rovnic pro úlohy s nespojitými koeficienty pomocí integrální identity . . . . .       | 78        |
| 2.2.2. Variační tvar integrální identity . . . . .                                                                  | 86        |
| 2.3. Diferenční schémata pro rovnice s nespojitými koeficienty založená na variačních principech . . . . .          | 99        |
| 2.3.1. Sestrojení nejjednodušší diferenční aproximace difúzní rovnice Ritzovou metodou . . . . .                    | 99        |
| 2.3.2. Sestrojení nejjednodušších diferenčních schémat pomocí Galerkinovy metody (metoda konečných prvků) . . . . . | 102       |
| 2.4. Některé principy volby podprostorů při řešení jednorozměrných úloh variačními metodami . . . . .               | 105       |
|                                                                                                                     | 5         |

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.4.1. Obecný přístup ke konstrukci podprostorů po částech polynomiálních funkcí                  | 105 |
| 2.4.2. Konstrukce báze vycházející z goniometrických funkcí a její použití ve variačních metodách | 109 |
| 2.5. Variačně-diferenční schémata pro rovnici eliptického typu ve dvou dimenzích                  | 114 |
| 2.5.1. Ritzova metoda                                                                             | 114 |
| 2.5.2. Galerkinova metoda                                                                         | 120 |
| 2.5.3. Způsoby konstrukce podprostorů                                                             | 124 |
| 2.6. Variační metody pro vícerozměrné úlohy                                                       | 127 |
| 2.6.1. Způsoby konstrukce podprostorů                                                             | 127 |
| 2.6.2. Konstrukce variačně-diferenčních schémat po souřadnicích                                   | 129 |
| 2.7. Metoda fiktivních oblastí                                                                    | 130 |
| <b>Kapitola 3. Interpolace síťových funkcí</b>                                                    | 137 |
| 3.1. Interpolace funkcí jedné proměnné                                                            | 138 |
| 3.1.1. Interpolace funkcí jedné proměnné kubickými spline-funkcemi                                | 138 |
| 3.1.2. Po částech kubická interpolace s vyrovnáváním                                              | 142 |
| 3.1.3. Hladké aproximace síťových funkcí                                                          | 144 |
| 3.1.4. Konvergence spline-funkcí                                                                  | 146 |
| 3.2. Interpolace funkcí dvou a více proměnných                                                    | 148 |
| 3.3. Aproximace funkcí více proměnných funkcemi z $C'$                                            | 151 |
| 3.4. Základy obecné teorie spline-funkcí                                                          | 157 |
| <b>Kapitola 4. Metody řešení stacionárních úloh matematické fyziky</b>                            | 162 |
| 4.1. Obecné pojmy z teorie iteračních metod                                                       | 164 |
| 4.2. Některé iterační metody a jejich optimalizace                                                | 166 |
| 4.2.1. Metoda prosté iterace                                                                      | 166 |
| 4.2.2. Konvergence a optimalizace stacionárních iteračních metod                                  | 169 |
| 4.2.3. Metoda superrelaxace                                                                       | 172 |
| 4.2.4. Iterační metoda Čebyševova typu                                                            | 177 |
| 4.2.5. Porovnání rychlosti konvergence iteračních metod pro soustavy diferenčních rovnic          | 185 |
| 4.3. Nestacionární iterační metody                                                                | 188 |
| 4.3.1. Věty o konvergenci                                                                         | 188 |
| 4.3.2. Metoda minimálních reziduí                                                                 | 190 |
| 4.3.3. Metoda sdružených gradientů                                                                | 192 |
| 4.4. Metoda rozkladu                                                                              | 197 |
| 4.4.1. Komutativní případ                                                                         | 201 |
| 4.4.2. Nekomutativní případ                                                                       | 206 |
| 4.4.3. Variační a čebyševská optimalizace metod rozkladu                                          | 210 |
| 4.5. Iterační metody pro soustavy se singularními maticemi                                        | 213 |
| 4.5.1. Případ soustavy, která má řešení                                                           | 214 |
| 4.5.2. Případ soustavy, která nemá řešení                                                         | 215 |
| 4.5.3. Maticová obdoba metody fiktivních oblastí                                                  | 217 |
| 4.6. Iterační metody při nepřesných vstupních datech                                              | 221 |
| 4.7. Přímé metody řešení diferenčních rovnic                                                      | 224 |
| 4.7.1. Rychlá Fourierova transformace                                                             | 224 |
| 4.7.2. Metoda cyklické redukce                                                                    | 229 |
| 4.7.3. Faktorizace diferenčních rovnic                                                            | 231 |
| <b>Kapitola 5. Metody řešení nestacionárních úloh</b>                                             | 244 |
| 5.1. Diferenční schémata druhého řádu přesnosti s časově proměnnými operátory                     | 244 |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2. Nehomogenní rovnice evolučního typu . . . . .                                         | 247        |
| 5.3. Metody rozkladu pro nestacionární úlohy . . . . .                                     | 248        |
| 5.3.1. Metoda stabilizace . . . . .                                                        | 249        |
| 5.3.2. Metoda prediktor-korektor . . . . .                                                 | 253        |
| 5.3.3. Metoda rozkladu po složkách . . . . .                                               | 257        |
| 5.3.4. Některé obecné poznámky . . . . .                                                   | 261        |
| 5.4. Vicesložkový rozklad úloh . . . . .                                                   | 262        |
| 5.4.1. Metoda stabilizace . . . . .                                                        | 263        |
| 5.4.2. Metoda prediktor-korektor . . . . .                                                 | 264        |
| 5.4.3. Metoda rozkladu po složkách založená na elementárních schématech . . . . .          | 266        |
| 5.4.4. Rozklad kvazilineárních úloh . . . . .                                              | 271        |
| 5.5. Obecný přístup k rozkladu po složkách . . . . .                                       | 272        |
| 5.6. Metody řešení rovnic hyperbolického typu . . . . .                                    | 277        |
| 5.6.1. Metoda stabilizace . . . . .                                                        | 277        |
| 5.6.2. Převod vlnové rovnice na úlohu evolučního typu . . . . .                            | 281        |
| <b>Kapitola 6. Zvyšování přesnosti Richardsonovou extrapolací . . . . .</b>                | <b>286</b> |
| 6.1. Obvyčejná diferenciální rovnice prvního řádu . . . . .                                | 286        |
| 6.2. Obecné výsledky . . . . .                                                             | 292        |
| 6.2.1. Věta o asymptotickém rozvoji . . . . .                                              | 292        |
| 6.2.2. Urychlování konvergence . . . . .                                                   | 298        |
| 6.3. Jednoduché integrální rovnice . . . . .                                               | 304        |
| 6.3.1. Fredholmova rovnice druhého druhu . . . . .                                         | 304        |
| 6.3.2. Volterrova rovnice prvního druhu . . . . .                                          | 307        |
| 6.4. Rovnice difúze v jedné dimenzi . . . . .                                              | 310        |
| 6.4.1. Diferenční metoda . . . . .                                                         | 310        |
| 6.4.2. Galerkinova metoda . . . . .                                                        | 313        |
| 6.5. Nestacionární úlohy . . . . .                                                         | 319        |
| 6.5.1. Rovnice vedení tepla . . . . .                                                      | 320        |
| 6.5.2. Metoda rozkladu pro evoluční úlohu . . . . .                                        | 325        |
| 6.6. Richardsonova extrapolace pro vícerozměrné úlohy . . . . .                            | 327        |
| <b>Kapitola 7. Formulace a numerické metody řešení některých inverzních úloh . . . . .</b> | <b>332</b> |
| 7.1. Základní definice a příklady . . . . .                                                | 333        |
| 7.2. Řešení inverzních evolučních úloh s konstantním operátorem . . . . .                  | 341        |
| 7.2.1. Fourierova metoda . . . . .                                                         | 341        |
| 7.2.2. Převod na řešení přímé úlohy . . . . .                                              | 344        |
| 7.3. Inverzní evoluční úloha s časově proměnným operátorem . . . . .                       | 347        |
| 7.4. Formulace inverzních úloh pomocí metod teorie poruch . . . . .                        | 353        |
| 7.4.1. Některé otázky lineární teorie měření . . . . .                                     | 353        |
| 7.4.2. Adjungované funkce a pojem ceny . . . . .                                           | 354        |
| 7.4.3. Teorie poruch pro lineární funkcionály . . . . .                                    | 357        |
| 7.4.4. Numerické metody pro řešení inverzních úloh a plánování experimentů . . . . .       | 359        |
| 7.5. Teorie poruch pro složité nelineární modely . . . . .                                 | 364        |
| 7.5.1. Základní rovnice . . . . .                                                          | 365        |
| 7.5.2. Adjungované rovnice a teorie poruch . . . . .                                       | 367        |
| 7.5.3. Teorie poruch pro nestacionární úlohy . . . . .                                     | 369        |
| 7.5.4. Fourierova metoda a teorie poruch . . . . .                                         | 370        |
| <b>Kapitola 8. Optimalizační metody . . . . .</b>                                          | <b>373</b> |
| 8.1. Konvexní programování . . . . .                                                       | 373        |

|                                                                                   |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.2. Lineární programování . . . . .                                              | 377        |
| 8.3. Kvadratické programování . . . . .                                           | 383        |
| 8.4. Numerické metody pro úlohu konvexního programování . . . . .                 | 387        |
| 8.5. Dynamické programování . . . . .                                             | 392        |
| 8.6. Pontrjaginův princip maxima . . . . .                                        | 396        |
| 8.7. Extremalizační úlohy s vedlejšími podmínkami a variační nerovnosti . . . . . | 402        |
| 8.7.1. Základy obecné teorie . . . . .                                            | 402        |
| 8.7.2. Příklady extremalizačních úloh . . . . .                                   | 405        |
| 8.7.3. Numerické metody pro extremalizační úlohy . . . . .                        | 410        |
| <b>Kapitola 9. Některé úlohy matematické fyziky . . . . .</b>                     | <b>416</b> |
| 9.1. Poissonova rovnice . . . . .                                                 | 416        |
| 9.1.1. Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici v jedné dimenzi . . . . .        | 416        |
| 9.1.2. Jednorozměrná Neumannova úloha . . . . .                                   | 418        |
| 9.1.3. Poissonova rovnice ve dvou dimenzích . . . . .                             | 421        |
| 9.1.4. Problematika okrajových podmínek . . . . .                                 | 429        |
| 9.2. Rovnice vedení tepla . . . . .                                               | 431        |
| 9.2.1. Úloha vedení tepla v jedné dimenzi . . . . .                               | 432        |
| 9.2.2. Úloha vedení tepla ve dvou dimenzích . . . . .                             | 436        |
| 9.3. Vlnová rovnice . . . . .                                                     | 437        |
| 9.4. Pohybová rovnice . . . . .                                                   | 441        |
| 9.4.1. Pohybová rovnice v jedné dimenzi . . . . .                                 | 442        |
| 9.4.2. Pohybová rovnice s proměnnými koeficienty ve dvou dimenzích . . . . .      | 449        |
| 9.4.3. Vícerozměrná pohybová rovnice . . . . .                                    | 455        |
| 9.5. Rovnice transportu neutronů . . . . .                                        | 460        |
| 9.5.1. Nestacionární rovnice . . . . .                                            | 460        |
| 9.5.2. Transportní rovnice v samoadjungovaném tvaru . . . . .                     | 472        |
| <b>Kapitola 10. Přehled metod numerické matematiky . . . . .</b>                  | <b>477</b> |
| 10.1. Teorie aproximace, stability a konvergence diferenčních schémat . . . . .   | 477        |
| 10.2. Metody numerického řešení úloh matematické fyziky . . . . .                 | 479        |
| 10.3. Podminěně korektní úlohy . . . . .                                          | 485        |
| 10.4. Numerické metody lineární algebry . . . . .                                 | 486        |
| 10.5. Problematika optimalizace numerických metod . . . . .                       | 490        |
| 10.6. Optimalizační metody . . . . .                                              | 492        |
| 10.7. Některé směry rozvoje numerické matematiky . . . . .                        | 493        |
| <b>Literatura . . . . .</b>                                                       | <b>496</b> |
| <b>Rejstřík . . . . .</b>                                                         | <b>524</b> |