# Contents

**Foreword** . . . ix

**Introduction** . . . xi

**Chapter 1. A First Encounter with Graphs** . . . 1

1.1. A few definitions . . . 1
1.1.1. Directed graphs . . . 1
1.1.2. Unoriented graphs . . . 9
1.2. Paths and connected components . . . 14
1.2.1. Connected components . . . 16
1.2.2. Stronger notions of connectivity . . . 18
1.3. Eulerian graphs . . . 23
1.4. Defining Hamiltonian graphs . . . 25
1.5. Distance and shortest path . . . 27
1.6. A few applications . . . 30
1.7. Comments . . . 35
1.8. Exercises . . . 37

**Chapter 2. A Glimpse at Complexity Theory** . . . 43

2.1. Some complexity classes . . . 43
2.2. Polynomial reductions . . . 46
2.3. More hard problems in graph theory . . . 49

**Chapter 3. Hamiltonian Graphs** . . . 53

3.1. A necessary condition . . . 53
3.2. A theorem of Dirac . . . 55

3.3. A theorem of Ore and the closure of a graph . . . . . . . . . . . 56
3.4. Chvátal's condition on degrees . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
3.5. Partition of $K_n$ into Hamiltonian circuits . . . . . . . . . . . . . 62
3.6. De Bruijn graphs and magic tricks . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
3.7. Exercises . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

**Chapter 4. Topological Sort and Graph Traversals** . . . . . . . 69

4.1. Trees . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
4.2. Acyclic graphs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
4.3. Exercises . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82

**Chapter 5. Building New Graphs from Old Ones** . . . . . . . . . 85

5.1. Some natural transformations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
5.2. Products . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90
5.3. Quotients . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
5.4. Counting spanning trees . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
5.5. Unraveling . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94
5.6. Exercises . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96

**Chapter 6. Planar Graphs** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99

6.1. Formal definitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
6.2. Euler's formula . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
6.3. Steinitz' theorem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
6.4. About the four-color theorem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113
6.5. The five-color theorem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
6.6. From Kuratowski's theorem to minors . . . . . . . . . . . . . . . 120
6.7. Exercises . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123

**Chapter 7. Colorings** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127

7.1. Homomorphisms of graphs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
7.2. A digression: isomorphisms and labeled vertices . . . . . . . . . 131
7.3. Link with colorings . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 134
7.4. Chromatic number and chromatic polynomial . . . . . . . . . . . 136
7.5. Ramsey numbers . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 140
7.6. Exercises . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 147

**Chapter 8. Algebraic Graph Theory** . . . . . . . . . . . . . . . . 151

8.1. Prerequisites . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151
8.2. Adjacency matrix . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 154
8.3. Playing with linear recurrences . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160

8.4. Interpretation of the coefficients . . . . . . . . . . . . . . . . . . 168
8.5. A theorem of Hoffman . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169
8.6. Counting directed spanning trees . . . . . . . . . . . . . . . . . . 172
8.7. Comments . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 177
8.8. Exercises . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 178

**Chapter 9. Perron–Frobenius Theory** . . . . . . . . . . . . . . . 183

9.1. Primitive graphs and Perron's theorem . . . . . . . . . . . . . . 183
9.2. Irreducible graphs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188
9.3. Applications . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190
9.4. Asymptotic properties . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195
9.4.1. Canonical form . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 196
9.4.2. Graphs with primitive components . . . . . . . . . . . . . . 197
9.4.3. Structure of connected graphs . . . . . . . . . . . . . . . . . 206
9.4.4. Period and the Perron–Frobenius theorem . . . . . . . . . . 214
9.4.5. Concluding examples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 218
9.5. The case of polynomial growth . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224
9.6. Exercises . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231

**Chapter 10. Google's Page Rank** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 233

10.1. Defining the Google matrix . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 238
10.2. Harvesting the primitivity of the Google matrix . . . . . . . . . 241
10.3. Computation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246
10.4. Probabilistic interpretation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246
10.5. Dependence on the parameter $\alpha$ . . . . . . . . . . . . . . . . 247
10.6. Comments . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 248

**Bibliography** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249

**Index** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 263