



Obsah

Předmluva	i
Obsah	ii
Některá označení	iv
Kapitola 1. Fourierovy řady	1
1.1. Abstraktní Fourierovy řady	1
1.2. Trigonometrické řady	9
1.3. Sčítání trigonometrických řad	18
1.4. Abstraktní Fourierovy řady ve fyzice	25
Výsledky kapitoly 1	37
Kapitola 2. Funkce komplexní proměnné	42
2.1. Komplexní čísla. Komplexní rovina. Stereografická projekce	42
2.2. Funkce komplexní proměnné – limita, spojitost, derivace. Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Elementární funkce	48
2.3. Křivkové integrály. Cauchyova věta. Mocninné řady	58
2.4. Laurentovy řady. Izolované singularity. Meromorfní funkce. Reziduová věta	76
2.5. Grupa lineárních lomených zobrazení. Konformní zobrazení	103
2.6. Příklady s fyzikální tematikou	121
Výsledky kapitoly 2	125
Kapitola 3. Fourierova a Laplaceova transformace	136
3.1. Fourierova transformace. Fourierův integrál	136
3.2. Laplaceova transformace funkcí jedné reálné proměnné	147

3.3. Úkoly s fyzikální tematikou	155
Výsledky kapitoly 3	158
Literatura	160

1.1. Abstraktní Fourierovy řady

V následujících úvahách budeme pracovat v Hilbertově prostoru nekonečné dimenze (reálný či komplexní) se skalárním součinem (\cdot, \cdot) a s normou $\|\cdot\|$. Předpokládáme, že prostor H je $H = L_2(a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) s normou $\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ na intervalu (a, b) a s skalárním součinem $(u, v) = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\rho(x) dx$. Zde $\rho(x)$ je kladná funkce.

Uvažujeme Hilbertovu prostornost H s normou $\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ a skalárním součinem $(u, v) = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\rho(x) dx$. Obecněji, je-li $\rho(x)$ kladná funkce na intervalu (a, b) , můžeme uvažovat i o množině takových, že $|u(x)|^2 \rho(x)$ je integrovatelná.

Norma $\|u\|$ a skalární součin (u, v) jsou definovány vztahy

Abstraktní Fourierova řada v H je zobecněním řady

\mathbb{R}_n do kartézských souřadnic. Zobrazení $f: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ odpovídající v \mathbb{R}_n je tzv. úplný ortogonální systém v H .

Definice 1. Řekneme, že systém $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v H je ortogonální, jestliže $(x_n, x_m) = 0$ pro $n \neq m$. Je-li navíc $\forall (n \in \mathbb{N}): (x_n, x_n) = \|x_n\|^2 = 1$, říkáme, že systém je úplný ortogonální systém. Ortogonální systém se nazývá úplný, jestliže pro každý prvek $x \in H$ kolmý ke všem prvkům systému, tj. $(x, x_n) = 0$, platí $x = 0$.

$$\forall (x \in H) \{ (x, x_n) = 0, n = 1, 2, \dots \} \Rightarrow x = 0$$

¹ Obecněji Hilbertova prostornost má tělesnou redukcí \mathbb{C} nebo \mathbb{R} .