

# OBSAH

Úvod . . . . .	11
<b>1 Optimalizačné modely a matematické programovanie . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1 Optimalizačné problémy, matematické modely a úlohy matematického programovania . . . . .	15
1.2 Konštrukcia optimalizačných modelov . . . . .	16
1.3 Všeobecná úloha matematického programovania, základné pojmy a klasifikácia jednotlivých tried úloh . . . . .	27
1.4 Historická poznámka o vývoji matematického programovania . . . . .	31
1.5 Cvičenia . . . . .	33
Literatúra . . . . .	36
<b>2 Matematický aparát lineárneho programovania . . . . .</b>	<b>38</b>
2.1 Vektorový euklidovský priestor . . . . .	38
2.1.1 Vektorový priestor . . . . .	38
2.1.2 Euklidovský priestor a niektoré geometrické útvary . . . . .	45
2.2 Konvexné množiny a ich vlastnosti . . . . .	50
2.3 Vety o duálnych sústavách lineárnych rovníc a nerovníc . . . . .	57
2.4 Cvičenia . . . . .	63
Literatúra . . . . .	64
<b>3 Teória lineárneho programovania . . . . .</b>	<b>66</b>
3.1 Úloha lineárneho programovania v štandardnom tvare a jej riešenia . . . . .	66
3.2 Vety o vlastnostiach riešení úloh lineárneho programovania . . . . .	73
3.3 Geometrická interpretácia úlohy lineárneho programovania . . . . .	81
3.4 Dvojice navzájom duálnych úloh lineárneho programovania . . . . .	87
3.5 Vety o vlastnostiach dvojíc duálnych úloh lineárneho programovania . . . . .	91
3.6 Ekonomická interpretácia duality v lineárnom programovaní . . . . .	98
3.7 Metóda Lagrangeových násobiteľov a duálne vzťahy úloh lineárneho programovania . . . . .	102
3.8 Cvičenia . . . . .	105
Literatúra . . . . .	107
<b>4 Simplexová metóda lineárneho programovania a jej algoritmy . . . . .</b>	<b>109</b>
4.1 Princíp simplexovej metódy . . . . .	109
4.2 Elementárna zmena bázy a kanonický tvar úlohy lineárneho programovania . . . . .	111
4.2.1 Elementárna zmena bázy . . . . .	111
4.2.2 Kanonický tvar úlohy lineárneho programovania a jeho vlastnosti . . . . .	118
4.3 Základný primárny algoritmus simplexovej metódy . . . . .	125

4.3.1	Všeobecné poznatky . . . . .	126
4.3.2	Simplexová tabuľka . . . . .	126
4.3.3	Kontrola optimálnosti . . . . .	128
4.3.4	Prechod na novú simplexovú tabuľku . . . . .	129
4.3.5	Určenie východiskového primárne prípustného kanonického tvaru . . . . .	135
4.3.6	Úprava algoritmu v prípade degenerácie . . . . .	141
4.4	Základný duálny algoritmus simplexovej metódy . . . . .	147
4.5	Revidovaný algoritmus simplexovej metódy . . . . .	150
4.5.1	Možnosť využitia inverznej matice bázy . . . . .	151
4.5.2	Aktualizácia inverznej matice bázy . . . . .	152
4.5.3	Opis algoritmu . . . . .	155
4.5.4	Záverečná poznámka o revidovanom primárnom algoritme . . . . .	168
4.6	Ďalšie poznatky o algoritmoch simplexovej metódy . . . . .	168
4.6.1	Blok vedúcich prvkov . . . . .	170
4.7	Metóda postupného zlepšovania plánu . . . . .	171
4.7.1	Metóda postupného zlepšovania plánu v algebraickej a maticovej forme . . . . .	174
4.8	Cvičenia . . . . .	181
	Literatúra . . . . .	186
<b>5</b>	<b>Parametrické programovanie a analýza senzitivity</b> . . . . .	<b>188</b>
5.1	Parametrické programovanie . . . . .	188
5.1.1	Jednparametrické úlohy s parametrom vo vektore pravých strán ohraničení . . . . .	189
5.1.2	Jednparametrické úlohy s parametrizáciou účelovej funkcie . . . . .	196
5.1.3	Jednparametrické úlohy s parametrom v matici podmienok . . . . .	207
5.1.4	Jednparametrické úlohy s parametrom vo všetkých koeficientoch úlohy . . . . .	207
5.2	Analýza senzitivity . . . . .	209
5.2.1	Zistenie prípustného intervalu zmeny ľubovoľného koeficientu účelovej funkcie . . . . .	210
5.2.2	Prípustná oblasť pre zmenu koeficientu pravej strany . . . . .	212
5.2.3	Substitučné možnosti a analýza senzitivity . . . . .	214
5.2.4	Pridanie, resp. vylúčenie činnosti v danej úlohe . . . . .	217
5.2.5	Zistenie intervalu zmeny technického koeficientu . . . . .	219
5.2.6	Pridanie resp. vynechanie podmienky v danej úlohe . . . . .	220
5.3	Cvičenia . . . . .	223
	Literatúra . . . . .	226
<b>6</b>	<b>Dekompozičné algoritmy</b> . . . . .	<b>227</b>
6.1	Programy s premenlivými koeficientmi . . . . .	227
6.2	Viacúrovňové modely lineárneho programovania a všeobecná charakteristika dekompozičných algoritmov . . . . .	230
6.3	Riešenie rozsiahlych úloh lineárneho programovania dekompozičnou metódou Dantziga – Wolfa . . . . .	232
6.3.1	Dekompozičná metóda Dantziga – Wolfa . . . . .	233
6.3.2	Algoritmus dekompozičnej metódy Dantziga – Wolfa . . . . .	243
6.3.3	Doplňujúce poznámky k dekompozičnej metóde Dantziga – Wolfa . . . . .	256
6.3.4	Ekonomická interpretácia dekompozičného algoritmu Dantziga – Wolfa . . . . .	259
6.4	Algoritmus viacúrovňového plánovania Kornaia – Liptáka . . . . .	262
6.5	Cvičenia . . . . .	264
	Literatúra . . . . .	265

<b>7</b>	<b>Viackriteriálna lineárna optimalizácia</b>	266
7.1	Úlohy viackriteriálnej optimalizácie a kompromisné riešenia	266
7.2	Kompromisné riešenia v lineárnych úlohách viackriteriálnej maximalizácie	268
7.2.1	Úloha vektorovej maximalizácie	268
7.2.2	Princíp nedominovaných riešení	269
7.2.3	Princíp agregácie cieľových kritérií	271
7.2.4	Princíp lexikografickej maximalizácie	273
7.2.5	Princíp maxima podľa minimálneho komponentu	275
7.2.6	Princíp minimálnej vzdialenosti od „ideálneho vektora“	277
7.3	Kompromisné riešenia v úlohách cieľového programovania	280
7.4	Interaktívne metódy viackriteriálnej optimalizácie	287
7.4.1	Podstata interaktívnych metód	287
7.4.2	Ziontsova – Walleniuosova metóda	289
7.4.3	Metóda STEM	293
7.5	Viackriteriálna simplexová metóda	296
7.6	Cvičenia	304
	Literatúra	306
<b>8</b>	<b>Dopravné a distribučné úlohy lineárneho programovania</b>	308
8.1	Vlastnosti dopravných úloh lineárneho programovania	308
8.1.1	Formulácia dopravnej úlohy a jej riešenie	308
8.1.2	Nájdenie východiskového bázického riešenia	313
8.2	Algoritmy riešenia dopravnej úlohy	317
8.2.1	Metóda potenciálov pre riešenie dopravnej úlohy	317
8.2.2	Degenerácia v dopravných úlohách a $\varepsilon$ -metóda riešenia	323
8.2.3	Riešenie nevybilancovaných dopravných úloh	327
8.3	Priradovacie problémy	331
8.3.1	Formulácia priradovacieho problému	331
8.3.2	Maďarská metóda riešenia priradovacieho problému	333
8.3.3	Maďarská metóda riešenia dopravnej úlohy	336
8.4	Analýza senzitivity v dopravnej úlohe — vlastnosť viacej za menej	340
8.5	Distribučné úlohy a ďalšie typy dopravných úloh	345
8.5.1	Distribučné úlohy	345
8.5.2	Viacindexové dopravné úlohy	348
8.6	Cvičenia	350
	Literatúra	352
<b>9</b>	<b>Celočíselné modely a metódy programovania</b>	353
9.1	Modely s celočíselnými podmienkami	353
9.1.1	Čisté celočíselné modely	354
9.1.2	Modely s binárnymi premennými	354
9.1.3	Zmiešané celočíselné modely	357
9.2	Metódy riešenia úloh s celočíselnými premennými	361
9.2.1	Metóda implicitnej enumerácie	362
9.2.2	Metóda vetiev a hraníc	367
9.2.3	Metóda rezných nadrovin	377
9.3	Metóda dekompozície zmiešanej celočíselnej úlohy	387
9.3.1	Krajné body a krajné smery úlohy lineárneho programovania	388
9.3.2	Ekvivalentná formulácia úlohy zmiešaného celočíselného programovania	389

9.3.3	Bendersova dekompozičná metóda . . . . .	392
9.4	Cvičenia . . . . .	394
	Literatúra . . . . .	395
<b>10</b>	<b>Optimalizačné sieťové modely . . . . .</b>	<b>397</b>
10.1	Základné pojmy teórie grafov . . . . .	397
10.2	Optimálne cesty v sieti . . . . .	403
10.2.1	Najkratšia cesta v sieti . . . . .	403
10.2.2	Najdlhšia (kritická) cesta v sieti . . . . .	408
10.2.3	Cesta s najväčšou pravdepodobnosťou . . . . .	409
10.3	Optimálne toky v sieti . . . . .	410
10.3.1	Maximálny tok v rovinnom grafe . . . . .	411
10.3.2	Všeobecný algoritmus pre určenie maximálneho toku . . . . .	413
10.3.3	Minimálny tok v sieti . . . . .	417
10.4	Metódy analýzy kritickej cesty . . . . .	417
10.4.1	Základy metód CPM a PERT . . . . .	417
10.4.2	Výpočet kritickej cesty . . . . .	419
10.4.3	Skracovanie kritickej cesty . . . . .	422
10.5	Cvičenia . . . . .	423
	Literatúra . . . . .	425
<b>11</b>	<b>Štruktúrna analýza medziodvetvových vzťahov . . . . .</b>	<b>426</b>
11.1	Základné pojmy bilancovania medziodvetvových vzťahov . . . . .	426
11.1.1	Bilancovanie medziodvetvových vzťahov . . . . .	427
11.2	Formulácia statického štruktúrneho modelu medziodvetvových vzťahov . . . . .	430
11.3	Ďalšie aplikácie statického štruktúrneho modelu . . . . .	433
11.4	Interpretácia bilancie a štruktúrneho modelu pomocou číselných údajov . . . . .	436
11.5	Skúmanie cenotvorných zložiek štruktúrnym modelom . . . . .	439
11.6	Problematika stability štruktúrnych koeficientov . . . . .	441
11.7	Štruktúrny model a jeho transformácia na optimalizačný . . . . .	445
11.8	Štruktúrne modely podniku . . . . .	447
11.9	Kontrolné otázky . . . . .	454
	Literatúra . . . . .	455
<b>12</b>	<b>Modelovanie komplexných úloh výroby . . . . .</b>	<b>456</b>
12.1	Základná úloha výroby . . . . .	456
12.2	Modelovanie výroby na úrovni národného hospodárstva . . . . .	468
12.3	Plánovanie výroby na úrovni podnikov . . . . .	475
12.4	Modely simulácie výroby poľnohospodárskeho podniku . . . . .	478
	Literatúra . . . . .	480
<b>13</b>	<b>Nelineárne programovanie . . . . .</b>	<b>481</b>
13.1	Úlohy nelineárneho programovania . . . . .	481
13.2	Všeobecné princípy riešenia úloh nelineárneho programovania . . . . .	484
13.3	Význam konvexnosti . . . . .	490
13.4	Metódy konvexného programovania . . . . .	495
13.4.1	Penalizačné a bariérové metódy . . . . .	496
13.4.2	Newtonova metóda . . . . .	498
13.4.3	Metódy prípustných smerov . . . . .	499

13.4.4	Metódy sečných nadrovin . . . . .	502
13.4.5	Metóda aproximujúceho programovania . . . . .	504
13.5	Veta o sedlovom bode . . . . .	505
13.6	Kvadratické programovanie . . . . .	508
13.7	Separovateľné úlohy . . . . .	513
13.8	Nekonvexné úlohy . . . . .	516
13.8.1	Lineárne lomené programovanie . . . . .	519
13.9	Cvičenia . . . . .	522
	Literatúra . . . . .	523
<b>14</b>	<b>Stochastické programovanie . . . . .</b>	<b>524</b>
14.1	Predmet stochastického programovania . . . . .	524
14.2	Klasifikácia úloh stochastického programovania . . . . .	525
14.3	Pasívne stochastické programovanie . . . . .	528
14.4	Matematická formulácia modelov aktívneho stochastického programovania . . . . .	531
14.4.1	Jednoetapová úloha stochastického programovania s apriórными rozhodovacími pravidlami . . . . .	532
14.4.2	Jednoetapová úloha stochastického programovania s aposteriórными rozhodovacími pravidlami . . . . .	535
14.4.3	Dvojetapové úlohy stochastického programovania . . . . .	536
14.5	Metódy riešenia úloh stochastického programovania . . . . .	539
14.5.1	Nepriame metódy riešenia úloh stochastického programovania. Deterministické ekvivalenty . . . . .	539
14.5.2	Priame metódy riešenia úloh stochastického programovania . . . . .	544
14.6	Priklady ekonomických úloh stochastického programovania . . . . .	547
14.6.1	Stochastická dopravná úloha . . . . .	547
14.6.2	Dvojetapový stochastický model rozmiestnenia poľnohospodárskych plodín na zavlážovanej pôde . . . . .	551
14.6.3	Stochastický model Leontieva . . . . .	553
14.7	Cvičenia . . . . .	555
	Literatúra . . . . .	556
<b>15</b>	<b>Dynamické programovanie . . . . .</b>	<b>557</b>
15.1	Úlohy dynamickej optimalizácie . . . . .	557
15.2	Diskrétne úlohy dynamického programovania. Bellmanov princíp optima . . . . .	559
15.2.1	Jednparametrický reprodukčný model . . . . .	564
15.2.2	Dvojparametrický reprodukčný model . . . . .	568
15.2.3	Dopravná úloha . . . . .	570
15.2.4	Úloha o rozdelení jedného zdroja . . . . .	573
15.2.5	Úloha o rozmiestnení výrobných kapacít . . . . .	576
15.3	Spojité dynamické optimalizačné úlohy. Pontrjaginov princíp maxima . . . . .	580
15.3.1	Najjednoduchšia úloha variačného počtu . . . . .	580
15.3.2	Úloha teórie regulácie . . . . .	581
15.3.3	Pontrjaginov princíp maxima . . . . .	582
15.3.4	Arowov – Karlinov model . . . . .	583
15.4	Dynamické modely typu Leontieva . . . . .	585
15.5	Cvičenia . . . . .	587
	Literatúra . . . . .	588

<b>16</b>	<b>Problémy riešenia rozsiahlych optimalizačných úloh na počítači</b>	589
16.1	Riedke matice	589
16.2	Zovšeobecnenie princípu revidovaného algoritmu simplexovej metódy	592
16.3	Trojuholníkový revidovaný algoritmus a jeho modifikácie	595
16.3.1	Dantzigov trojuholníkový algoritmus	596
16.3.2	Bartelsova a Golubova modifikácia trojuholníkového algoritmu	598
16.3.3	Forrestova a Tomlinova modifikácia trojuholníkového algoritmu	599
16.4	Revidovaný algoritmus simplexovej metódy s úsporou aritmetických operácií	601
16.5	Polynomiálne algoritmy lineárneho programovania	605
16.5.1	Zložitosť algoritmov	606
16.5.2	Čačijanov algoritmus	607
16.5.3	Karmarkarov algoritmus	609
16.6	Programové systémy na riešenie optimalizačných úloh	611
16.6.1	Základné znaky PSMP pre počítače tretej generácie	612
16.6.2	Systém MPS	614
16.6.3	Vstupný kód systému MPS pre súbor údajov o lineárnom optimalizačnom probléme	616
16.6.4	Programovanie v systéme MPS	625
16.6.5	Systém MPSX	634
16.6.6	Programové vybavenie profesionálnych osobných počítačov	643
16.7	Cvičenia	646
	Literatúra	649
	<b>Register</b>	651