

# Obsah

Předmluva	3
<b>1 <math>\mathbb{R}^n</math> jako vektorový prostor</b>	<b>7</b>
1.1 Soubor prvků	7
1.2 Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$	9
1.3 Lineární závislost a nezávislost	13
1.4 Vektorové podprostory	20
1.5 Báze a dimenze	29
1.6 Průnik a součet podprostorů	41
1.7 Souřadnice vzhledem k bázi	49
<b>2 Lineární zobrazení a matice</b>	<b>53</b>
2.1 Pojem lineárního zobrazení	53
2.2 Součet a násobek lineárních zobrazení	65
2.3 Matice zobrazení	68
2.4 Hodnota matice	74
2.5 Inverzní matice, regulární matice	75
<b>3 Soustavy lineárních rovnic a matice</b>	<b>79</b>
3.1 Homogenní soustavy	80
3.2 Nehomogenní soustavy	81
3.3 Gaussova eliminace, řádkové úpravy matice	84
3.4 Řešení soustav lineárních rovnic	92
3.5 Výpočet inverzní matice	98
<b>4 Determinanty</b>	<b>101</b>
4.1 Permutace	101
4.2 Definice a základní vlastnosti determinantu	106
4.3 Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce	115
4.4 Cramerovo pravidlo	120
<b>5 Skalární součin a ortogonalita</b>	<b>123</b>
5.1 Pojem skalárního součinu	123
5.2 Ortogonální báze, Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces	126
5.3 Ortonormální matice	131
5.4 Ortogonální doplněk	135

<b>6</b>	<b>Lineární geometrie</b>	<b>141</b>
6.1	Lineály a jejich vzájemná poloha . . . . .	141
6.2	Vzdálenost lineálů . . . . .	152
<b>7</b>	<b>Vlastní vektory a vlastní čísla</b>	<b>159</b>
7.1	Pojem vlastního vektoru . . . . .	159
7.2	Podobnost matic . . . . .	165
7.3	Symetrické a ortonormální matice . . . . .	173
<b>8</b>	<b>Kvadratické formy a kvadriky</b>	<b>181</b>
8.1	Kvadratické funkce a kvadriky . . . . .	181
8.2	Kvadratické formy . . . . .	202

I když budeme definovat pojem obecného vektorového prostoru, musíme se zde především na práci s prostory  $\mathbb{R}^n$ , event.  $\mathbb{C}^n$ . Základní pojmy a tvrzení týkající se vektorových prostorů budeme formulovat pro prostor  $\mathbb{R}^n$ ; upozorníme však již v této kapitole na vztahy mezi  $\mathbb{R}^n$  a tvzení, jež bez potíží přenesl na případ obecného vektorového prostoru, včetně toho, že případ prostoru  $\mathbb{C}^n$ . Jedná se především o soujmy lineární závislosti a nezávislosti vektorů (souboru vektorů), pojem vektorového podprostoru, báze a dimenze vektorového prostoru a podprostoru (zde některá tvrzení bude možné z  $\mathbb{R}^n$  přenést už pouze ve tzv. komplexiovaných prostorech).

Nejprve však připomeneme (zavedeme) pojem souboru, který budeme dále potřebovat.

## 1.1 Soubor prvků

Doporučujeme čtenáři, aby si nejprve zopakoval základní pojmy týkající se množin a zobrazení (viz např. úvod v MI), množiny reálných čísel a množiny komplexních čísel (MI – úvod a kapitoly 1, odstavce 1.5). Pojem souboru připomíná pojem uspořádané množiny, ale liší se, zkrátka řečeno, v tom, že prvky souboru se mohou opakovat (pro pojem uspořádané množiny, tj. množiny, na které je definováno nějaké uspořádání, viz úvod v MI).

Buď  $A$  množina,  $A \neq \emptyset$ . Formálně definujeme soubor prvků množiny  $A$  (krátce soubor) jako libovolné zobrazení  $S: I \rightarrow A$ , kde  $I$  je libovolná množina, které říkáme indexová množina (nejčastěji) buď  $I$  nějaká množina celých čísel (konečná nebo nekonečná) a jejími prvky říkáme indexy). Je-li  $I$  konečná množina, budeme o  $S$  mluvit jako o *konečném souboru*. V těchto případech budeme pracovat téměř výhradně s konečnými soubory. Je-li  $I = \emptyset$ , pak mluvíme o *prázdném souboru*. Pokud však nebude explicitě řečeno něco jiného, budeme vše pod pojmem soubor myslet neprázdný soubor (tj. budeme předpokládat, že indexová množina  $I$  je neprázdná). Je-li  $S$  soubor prvků množiny  $A$ ,  $I$  příslušná indexová množina a  $i \in I$ , pak pro hodnotu  $S(i)$  používáme značení  $S(i) = a_i$  (nebo  $S(i) = x_i$ ,  $S(i) = y_i$  apod.). Tento soubor přitom zapisujeme ve tvaru

$$S = (a_i)_{i \in I}$$

(nebo krátce  $S = (a_i)$  pokud je zřejmé, o jakou indexovou množinu  $I$  se jedná). Hodnotě  $a_i$  říkáme *prvky* a  $i$  *prvek indexu*, abychom označili  $(a_i)_{i \in I}$ .