

INHALTSVERZEICHNIS

A. Grundlagen der Geometrie

1. I. Axiome der Inzidenz.....	9
2. Verwirklichung der Axiome I im erweiterten Anschauungsraum	11
3. Definitionen. Projektive Transformation von Grundgebilden I. und II. Stufe	12
4. Dualität im Raum, im ebenen Feld und im Bündel	13
5. Satz von Desargues.....	14
6. Viereckssatz	16
7. II. Axiome der Anordnung	16
8. Satz von Pasch. Dreiecksseiten und Dreieckswinkel	18
9. Harmonische Paarung	19
10. Projektive Streckengleichheit für einen Fluchtpunkt	21
11. Projektive Skala	22
12. III. Stetigkeitsaxiom von Dedekind	23
13. Satz vom Fluchtpunkt der projektiven Skala	23
14. Ein-eindeutige Zuordnung zwischen der Punktreihe und der Zahlenreihe	24
15. Doppelverhältnis (DV) eines beliebigen (reinen) Wurfes	26
16. DV eines gemischten Punkt-Geraden-Wurfes in der Ebene	29
17. Inzidenzsatz für Punkt und Gerade	31
18. DV eines gemischten Punkt-Ebenen-Wurfes im Raum	33
19. Inzidenzsatz für Punkt und Ebene	34
20. Fundamentalsatz der projektiven Zuordnung von Grundgebilden I. Stufe	37
21. Fundamentalsatz für Grundgebilde II. Stufe	38
22. Kollineare und korrelative Transformation	39
23. Fundamentalsatz für Grundgebilde III. Stufe	42
24. Projektive Geometrie	44
25. Auszeichnung A. Parallelgeometrie	45
26. Affine Transformation und Geometrie	46
27. Auszeichnung A_0 . Orthogonalgeometrie.....	46
28. Äquiforme Transformation und Geometrie	47
29. Geometrie und Dualität in den parallelgeometrisch verschiedenen Grundgebilden	48
30. Abschließender Charakter der Euklidischen Geometrie	49
31. Euklidische und nichteuklidische Geometrie	49

B. Projektive Geometrie

I. Projektive Geometrie in den Grundgebilden I. Stufe (Reelle Punktreihe)

32. DV-Koordinaten. Imaginäre Punkte der reellen Punktreihe	51
33. Homogene Koordinaten	52
34. Koordinatentransformation	52
35. Ausdruck des DVes in Koordinaten	53
36. Analytischer Ausdruck der projektiven Transformation	54
37. Quadratische Formen.....	54
38. Das Punktepaar	56
39. Involution von Punktepaaaren.....	56
40. Doppelpunkte der Involution	57

II. Projektive Geometrie in den Grundgebilden II. Stufe (Reelle Ebene)

41. Homogene Punkt- und Linienkoordinaten	59
42. Ausdruck der Inzidenzbedingung in den Koordinaten	60
43. Harmonische Polarität in bezug auf ein Dreieck	62
44. Gleichung der Geraden, des Punktes. 3 Punkte kollinear. 3 Gerade konzentrisch ..	62
45. Imaginäre Punkte und Gerade in der reellen Ebene	63
46. Transformation der Punktkoordinaten	64
47. Transformation der Linienkoordinaten	65
48. Ausdruck des gemischten DVes in Koordinaten	65
49. Mehrere Gerade oder Punkte	66
50. Kollineare oder projektive Transformation der Ebene (analytisch)	67
51. Korrelative oder reziproke Transformation der Ebene (analytisch)	68
52. Kurven II. Ordnung und II. Klasse. Kegelschnitt (KS)	68
53. Weitere allgemeine Eigenschaften der KSe	69
54. Projektive Einteilung der KSe	70
55. Kriterien für die projektive Art des KSes aus den Koeffizienten	71
56. Projektive Transformation der Ebene mit invariantem KS	72
57. Polarität in bezug auf einen KS	72

III. Projektive Geometrie im Raum

58. Homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten	74
59. Ausdruck der Inzidenzbedingung in den Koordinaten	75
60. Harmonische Polarität in bezug auf ein Tetraeder	76
61. Gleichung der Ebene, des Punktes. Gleichungssysteme der Geraden	77
62. Imaginäre Elemente im Raum	77
63. Koordinatentransformation	78
64. Mehrere Punkte oder Ebenen	79
65. Kollineare oder projektive Transformation des Raumes (analytisch). „Rechts“ und „Links“	80
66. Korrelative oder reziproke Transformation des Raumes (analytisch)	81
67. Linienkoordinaten	81
68. Ebene und Gerade; Punkt und Gerade. Mehrere Gerade	82
69. Flächen II. Ordnung und II. Klasse	84
70. Die adjungierte Fläche	85
71. Projektive Einteilung der Flächen II. Grades	85
72. Kriterien für die projektive Art der Fläche	86
73. Pol und Polarebene	87
74. Polare Gerade	87
75. Polartetraeder	88

C. Parallelgeometrie

I. Elemente der Parallelgeometrie

76. Qualitative Begriffe	89
77. Vektoren und Winkel	90
78. Quantitative Begriffe: Das reine Abstandsverhältnis (AV)	92
79. Das gemischte AV in der Ebene	92
80. Das gemischte AV im Raum	93
81. Hessesche Koordinaten im affinen Raum	94
82. Analytischer Ausdruck der Parallelitäten usw.	95
83. Analytischer Ausdruck der AVe und ihrer Anwendungen	97
84. Transformation der Hesseschen Koordinaten und affine Transformation	98

II. Parallelgeometrie der Gebilde II. Grades

85. Parallelgeometrische Spezialfälle des Punktpaares und der Involution	99
86. Affine Einteilung der nicht entarteten KSe.....	99
87. Mittelpunkt, Mittelpunktsgleichung des KSe	100
88. Durchmesser und Asymptoten	101
89. Die Eichellipse des Hesseschen Koordinatensystems in der Ebene	101
90. Affine Einteilung der höchstens einfach entarteten Flächen II. Ordnung	102
91. Affine Einteilung der höchstens einfach entarteten Flächen II. Klasse	103
92. Mittelpunkt, Diametralebene, Durchmesser usw.	105
93. Das Eichellipsoid des Hesseschen Koordinatensystems im Raum	105

D. Orthogonalgeometrie**I. Elemente der Orthogonalgeometrie**

94. Qualitative Begriffe; Längengleichheit von Vektoren	107
95. Gleichheit von Winkeln	108
96. Quantitative Begriffe: Richtungsverhältnis (RV), Stellungsverhältnis (SV)	108
97. Größenverhältnis nicht paralleler Vektoren und Flächenstücke.....	109
98. Kreis und Kugel	110
99. Äquiforme Koordinaten	110
100. Orthogonalitätsbedingungen	111
101. Transformation der äquiformen Koordinaten. Äquiforme Transformation des Raumes	112
102. „Gleichheit“ und „Kongruenz“	113
103. Das allgemeine Prinzip der Maßbestimmung	114
104. Sinusquadrat von Elementepaaren	116
105. Beziehungen zwischen den verschiedenen zweielementigen Größen	118
106. Kosinusquadrat und Tangensquadrat von Elementepaaren	120
107. Sinusquadrat von Elementetripeln und -quadrupeln	121
108. Eigenschaften der dreielementigen Größen	122
109. Eigenschaften der vierelementigen Größen	123
110. Die eindeutigen goniometrischen Funktionen bestimmter Winkel	124
111. Anwendungen des Kosinus eines Winkels	126
112. Projektionssätze.....	128
113. Vektoren in der Orthogonalgeometrie	128
114. Winkelgrößen	129
115. Polarkoordinaten	131

II. Orthogonalgeometrie der Gebilde II. Grades

116. Im eigentlichen Büschel mit eigentlichem Mittelpunkt	131
117. In der eigentlichen Ebene	132
118. Im Bündel mit eigentlichem Mittelpunkt.....	133
119. Im Raum	134

E. Nichteuklidische (Cayley-Kleinsche) Geometrie**I. Absolutes Gebilde. Parallelitäten und Orthogonalitäten. Bewegungen**

120. Die nichteuklidischen Auszeichnungen A_1 und A_{-1} . Die Kleinschen Modelle	135
121. Koordinaten. Eichfunktionen. Absolutes Gebilde	137
122. Parallelitäten	138
123. Parallel gestellte (parataktische) Gerade	140

124. Orthogonalitäten	141
125. Gemeinsame Normalen zweier reeller windschiefer Gerader	142
126. Bewegungsgleichungen im Raum	143
127. Bewegungsgleichungen in der Ebene und in der Geraden	145
128. Die Bewegungsarten in der Ebene bestimmt durch die Fixelemente	146
129. Die Fixelemente und die Arten der Bewegung im Raum	148
130. I. $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$	149
131. II. $\varrho_1, \varrho_1, \varrho_3, \varrho_4$	149
132. III. $\varrho_1, \varrho_1, \varrho_3, \varrho_3$	151
133. IV. $\varrho_1, \varrho_1, \varrho_1, \varrho_1$	152

II. Cayley-Kleinsche Größenlehre

134. Normalkoordinaten	153
135. Sinus von Elementepaaren (Goniometrie). Linienelement	154
136. Beziehungen zwischen den verschiedenen Sinus	156
137. Kosinus und Tangens von Elementepaaren	157
138. Die eindeutigen goniometrischen Funktionen eines bestimmten Segmentes	157
139. Additionstheoreme der goniometrischen Funktionen	159
140. Größe des Segmentes (der Strecke, des Winkels)	160
141. Sinus von Elementetripeln (Trigonometrie)	162
142. Sinus- und Kosinussätze	164
143. Flächenelement	166
144. Dreiecksfläche und Winkelsumme	167
145. Tetraedrometrie. Volumenelement	169
146. Kantensinus des Tetraeders	170
147. Kreise	171
148. Kugeln. Ort der Geraden konstanten Momentes	173
149. Kleinste Strecken der Punkte und Winkel der Ebenen zweier reellen windschiefen Geraden	174
150. Clifford-Fläche	176

III. Abgeänderte Darstellungsgebiete der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie

151. Abbildung der Kleinschen Modelle auf sich selbst	177
152. Bündel und Hemisphäre als Darstellungsgebiet der elliptischen Geometrie. Sphärische Geometrie	179
153. Zweischaliges Rotationshyperboloid als Darstellungsgebiet der hyperbolischen Geometrie	181
154. Hyperbolische Geometrie auf der Pseudosphäre	181
155. Bilder des realen Raumes	182
156. Euklidisch unendlich großes Bild des hyperbolischen Raumes	182
157. Euklidisch endliches Bild des elliptischen Raumes	186
158. Sphärische Doppelene und sphärischer Doppelraum	188

Nachtrag zu den Grundlagen der Geometrie	189
--	-----

Sachregister	191
--------------------	-----